

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH**

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Cho các số thực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}$

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

- b) Cho các số thực a, b khác -2 thỏa mãn $(2a+1)(2b+1) = 9$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b}$

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình : $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

- b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại M, N và có tâm I thuộc cạnh BC . Kẻ đường cao AH của tam giác ABC

- a) Chứng minh các điểm A, M, H, I, N cùng thuộc một đường tròn và HA là tia phân giác của góc MHN
- b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với BC cắt MN tại K . Chứng minh AK đi qua trung điểm D của BC
- c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{CAD}$

Câu 4. (1,5 điểm)

- a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = xy^2 + 1$
- b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a}$. Chứng minh ab là lập phương của một số nguyên dương

Câu 5. (1,5 điểm)

- a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{1}{8} + a^4 + b^4 + c^4$$

- b) Ban đầu có 2020 viên sỏi để trong một chiếc túi. Có thể thực hiện công việc như sau:

Bước 1: Bỏ đi 1 viên sỏi và chia túi này thành 2 túi mới

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 4 túi.

Tiếp tục quá trình trên. Hỏi sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi hay không ?

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có: $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$; $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$; $c^2 = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} + 2$

Ta có : $ab = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow abc = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$$

b) Từ điều kiện bài toán rút được $a = \frac{9}{2(2b+1)} - \frac{1}{2}$ (do $2b+1 \neq 0$)

Suy ra $\frac{1}{2+a} = \frac{2b+1}{3(b+2)} \Rightarrow A = \frac{2b+1}{3(b+2)} + \frac{1}{b+2} = \frac{2b+1+3}{3(b+2)} = \frac{2}{3}$

Câu 2.

a) Điều kiện $x \geq -3$, đặt $\sqrt{x+3} = t, (t \geq 0)$, phương trình trở thành:

$$2x^2 + t^2 - 3xt = 0 \Leftrightarrow (x-t)(2x-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ 2x=t \end{cases}$$

Với $x=t \Rightarrow x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ (tmdk)}$

Với $2x=t \Rightarrow 2x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (tmdk)}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

$$b) \begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $x, y \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình (2) tương đương $(x+y-1)(x+2y+4)=0$

Với điều kiện xác định ta có $x+2y+4 \geq -\frac{1}{2}-1+4 > 0 \Rightarrow x+y=1$

Đặt $a = \sqrt{2x+1} \geq 0$; $b = \sqrt{2y+1} \geq 0$, kết hợp (1) và $x+y=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b = \frac{1}{8}(a^2-b^2) \\ a^2+b^2 = 4 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$, hệ vô nghiệm

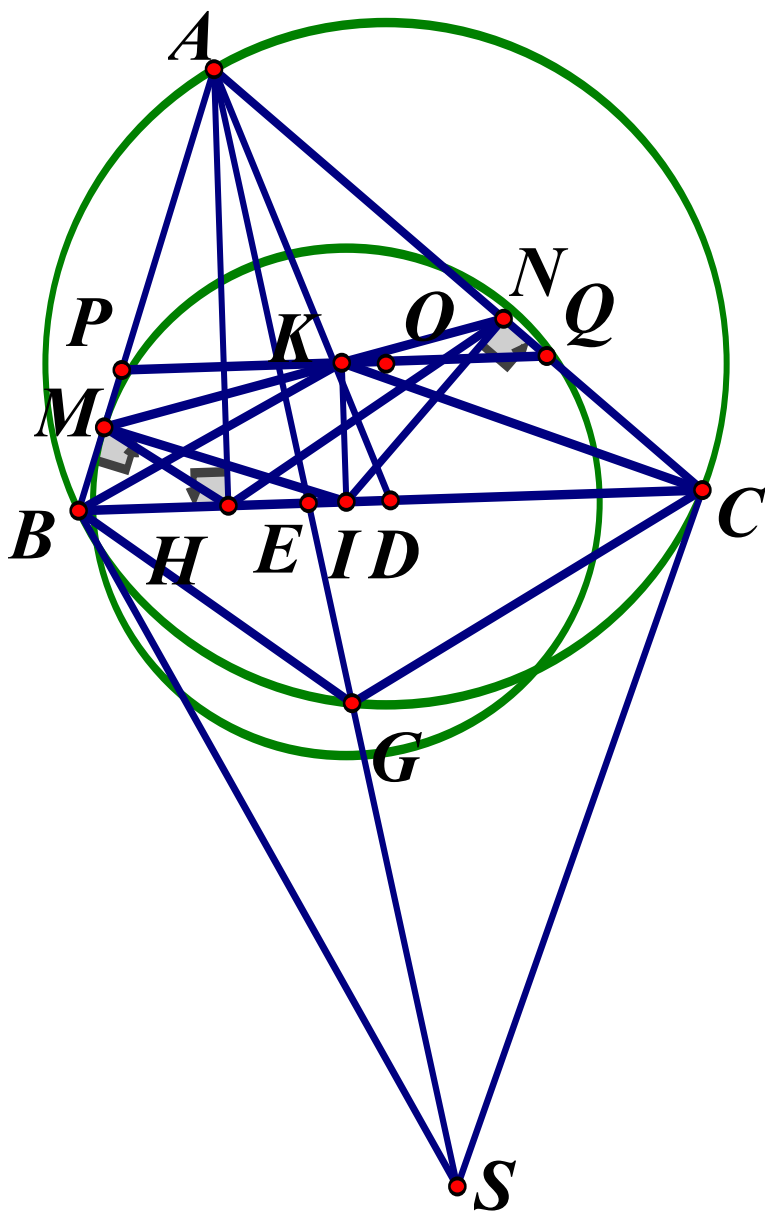
Trường hợp 2: $\begin{cases} (a-b)^2(a+b)=8 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(4-2ab)=8 \\ (a+b)^2-2ab=4 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$,

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} S(4-P)=8 \\ S^2-2P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\frac{S^2-4}{2} \\ S\left(4-\frac{S^2-4}{2}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\frac{S^2-4}{2} \\ S \in \{2; -1 \pm \sqrt{5}\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 3.



a) Do AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $\widehat{AMI} = \widehat{ANI} = 90^\circ$, suy ra các điểm M, N thuộc đường tròn đường kính AI

Ta có AH là đường cao của tam giác ABC nên $\angle AHI = 90^\circ, \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính AI

Suy ra các điểm A, M, H, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính AI

Do tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên $\widehat{AHM} = \widehat{ANM}$ và $\angle AHN = \angle AMN$

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau, suy ra ΔAMN cân tại A,

$$\Rightarrow \angle AMN = \angle ANM \Rightarrow \angle AHM = \angle AHN \Rightarrow HA \text{ là tia phân giác của } \angle MHN \quad \square$$

b) Kẻ đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB và AC tại P và Q
Ta có: $\widehat{HKP} + \widehat{HMP} = 180^\circ \Rightarrow IKPM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KIP} = \widehat{KMP}$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{KIQ} = \widehat{KNA} \Rightarrow \widehat{KIP} = \widehat{KIQ}$

Xét tam giác IPQ có IK vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên nó là tam giác cân, suy ra IK là đường trung tuyến hay K là trung điểm của PQ

Dựng D là giao điểm của AK và BC

Do $PQ \parallel BC$, áp dụng định lý Ta – let ta có: $\frac{KP}{BD} = \frac{AK}{AD} = \frac{KQ}{DC} \Rightarrow DB = DC$

$\Rightarrow D$ là trung điểm của BC

c) Gọi E là giao điểm của AS và BC , G là giao điểm thứ 2 của AS và (O)

Trên cạnh BC lấy điểm D' khác E sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAD'}$, cần chứng minh D' là trung điểm của BC

Ta có: $\widehat{AGB} = \widehat{ACD'}$ và $\widehat{BAG} = \widehat{CAD'} \Rightarrow \triangle AGB \sim \triangle ACD' \Rightarrow \frac{GB}{CD'} = \frac{AG}{AC}$ (1)

Ta có: $\angle AGC = \angle ABD' \Rightarrow \widehat{CAG} = \widehat{BAD'} \Rightarrow \triangle AGC \sim \triangle ABD' \Rightarrow \frac{GC}{BD'} = \frac{AG}{AB}$ (2)

Ta có: $\angle SBG = \angle SAB \Rightarrow \triangle SBG \sim \triangle SAB \Rightarrow \frac{SB}{SA} = \frac{BG}{AB}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{SC}{SA} = \frac{CG}{AC} \Rightarrow \frac{CG}{CA} = \frac{BG}{BA}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $CD' = BD' \Rightarrow D'$ là trung điểm của BC (đpcm)

Câu 4.

a) Ta có:

$$x^3 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - y^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Q} \\ y^2 = x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (2y)^2 - (2x + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow (2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 3 \\ &= 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1) \end{aligned}$$

Lập bảng xét các trường hợp ta thu được $(x, y) \in \{(0; 1); (0; -1); (-1; -1); (-1; 0)\}$

Vậy tập các giá trị $(x, y) \in \{(0; 1); (0; -1); (-1; -1); (-1; 0); (1; y) | y \in \mathbb{Q}\}$

b) Ta có: $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a} \Leftrightarrow abc + a = a^2b + b^2$

Suy ra $a:b$, đặt $a = bk, k \in \mathbb{N}^*$, thay vào điều kiện ta được:

$$b^2kc + bk = b^3k^2 + b^2 \Leftrightarrow bkc + k = b^2k^2 + b$$

Suy ra b chia hết cho k và k chia hết cho b nên $b = k \Rightarrow ab = b^3$ (đpcm)

Câu 5.

a) Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) = a^3(1 - a) + b^3(1 - b) + c^3(1 - c)$
 $= a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b) = a^2(ab + ac) + b^2(bc + ba) + c^2(ac + bc)$

Do a, b, c không âm nên bc, ca, ab không âm

$$\Rightarrow a^2(ab + ac) + b^2(bc + ba) + c^2(ca + cb)$$

$$\leq a^2(ab + bc + ca) + b^2(bc + ca + ab) + c^2(ca + cb + ab)$$

$$= (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)(2ab + 2bc + 2ca) \leq \frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)^2}{4} = \frac{1}{8}(\text{đpcm})$$

b) Sau mỗi bước, số sỏi giảm đi 1 và số túi tăng lên 1, suy ra tổng số sỏi và túi không thay đổi sau mỗi bước, tổng này là 2021

Giả sử sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi, khi đó tổng số sỏi và túi phải chia hết cho 3.

Do 2021 không chia hết cho 3 nên mâu thuẫn, suy ra giả sử sai

Vậy không thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi sau một số bước.