

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 9/6/2021

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $2x\sqrt{2x+3} = 3x^2 + 6x + 1$

- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3x - 4y - 4 = \sqrt{9(x-1)(x^2 - 2xy + x - 2y)} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2y} = \sqrt{2x-2y+5} \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 - 2(m-3)x + 3m^2 - 8m + 5 = 0$, với m là tham số.

- a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 = x_1 - x_2.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , D là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) , H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC . Hai điểm K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB và AC .

- a) Chứng minh $AL.CB = AB.KL$.
- b) Lấy điểm E trên đoạn thẳng AD sao cho $BD = DE$. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- c) Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (K nằm giữa M, L). Chứng minh $AM = AN = AH$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$.
- b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{b}{2}$.

b) $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

.....HẾT.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Lưu ý: - Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,125.

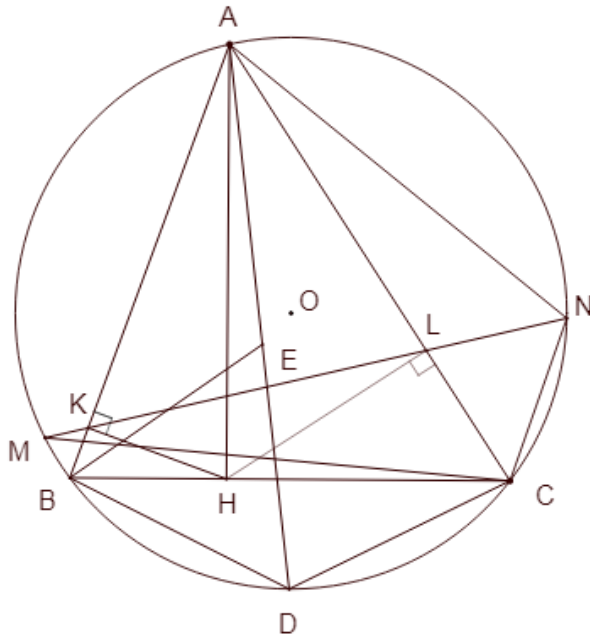
- Học sinh giải cách khác với đáp án thì giám khảo xem xét, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$.	1,5
	a) Rút gọn biểu thức A.	1,0
	ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 1$	0,25
	Ta có $\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	Vậy $A = \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	b) Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên	0,5
	Ta có $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,125
	Để A nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. Hay $(\sqrt{x}-1) \in \{2; -2; 1; -1\}$. Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x}-1 = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ (l)} \\ \sqrt{x}-1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (l)} \\ \sqrt{x}-1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (n)} \\ \sqrt{x}-1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (n)} \end{cases}$	0,25
	Vậy có 2 giá trị $x = 4; x = 9$ thì A nguyên.	0,125

2	a) Giải phương trình: $2x\sqrt{2x+3} = 3x^2 + 6x + 1$. b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3x - 4y - 4 = \sqrt{9(x-1)(x^2 - 2xy + x - 2y)} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2y} = \sqrt{2x-2y+5}. \end{cases}$	2,0
	a) Giải phương trình: $2x\sqrt{2x+3} = 3x^2 + 6x + 1$.	1,0
	ĐKXĐ: $x \geq \frac{-3}{2}$	0,125
	Ta có Pt $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 + 2x\sqrt{2x+3} = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2x+3})^2 = (2x+2)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2x+3} = 2x+2 \\ x + \sqrt{2x+3} = -2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} = x+2 \\ \sqrt{2x+3} = -3x-2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = -1(n) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ 9x^2 + 10x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x = -1(n) \\ x = -\frac{1}{9}(l) \end{cases}$	0,5
	Kết hợp với điều kiện phương trình có nghiệm là $x = -1$.	0,125
	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3x - 4y - 4 = \sqrt{9(x-1)(x^2 - 2xy + x - 2y)} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2y} = \sqrt{2x-2y+5}. \end{cases}$	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} (x-1)(x^2 - 2xy + x - 2y) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \\ 2x-2y+5 \geq 0 \end{cases}$	0,125
	Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow x+1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2y)} + x-2y = 2(x-y) + 5$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2y)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x-2y)} = 2$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-2y) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + x - 2y = 4 (*)$	0,25
	Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(x^2 - 2xy + x - 2y) + x - 4 = \sqrt{9(x-1)(x^2 - 2xy + x - 2y)}$	0,25

	$\Leftrightarrow 8 + x - 4 = \sqrt{36(x-1)} \Leftrightarrow \sqrt{36(x-1)} = x + 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 36(x-1) = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 - 28x + 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x = 2 \quad (n) \\ x = 26 \quad (n) \end{cases}$	
	- Với $x = 2$ thay vào (*) ta có: $pt(*) \Leftrightarrow 4 - 4y + 2 - 2y = 4 \Leftrightarrow -6y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn). - Với $x = 26$ thay vào (*) ta có: $(*) \Leftrightarrow 676 - 52y + 26 - 2y = 4 \Leftrightarrow -54y = -698 \Leftrightarrow y = \frac{349}{27}$. (thỏa mãn).	0,25
	Kết luận: Hệ có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 26 \\ y = \frac{349}{27} \end{cases}$.	0,125
3	Cho phương trình: $x^2 - 2(m-3)x + 3m^2 - 8m + 5 = 0$, với m là tham số. a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu. b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 = x_1 - x_2$	1,5
	a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.	0,75
	Để phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m-5) < 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ 3m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{3}$	0,375
	Vậy $1 < m < \frac{5}{3}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.	0,125
	b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 = x_1 - x_2$	0,75
	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' = (m-3)^2 - 3m^2 + 8m - 5 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 - 3m^2 + 8m - 5 > 0$ $\Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$	0,125
	Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-3) & (1) \\ x_1x_2 = 3m^2 - 8m + 5 & (2) \end{cases}$	0,125
	Theo đề ta có	0,25

	$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 = x_1 - x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = x_1 - x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \end{cases}$	
	• TH1: $x_1 - x_2 = 0$ (loại vì $x_1 \neq x_2$). • TH2: $x_1 - 2x_2 - 1 = 0$, kết hợp với (1) ta có hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-3) \\ x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = 2m-7 \\ x_1 = 2x_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2m-7}{3} \\ x_1 = \frac{4m-11}{3} \end{cases}$ Thay $x_1; x_2$ tìm được vào (2) ta có: $\frac{4m-11}{3} \cdot \frac{2m-7}{3} = 3m^2 - 8m + 5$ $\Leftrightarrow 19m^2 - 22m - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (l) \\ m = \frac{-16}{19} & (tm) \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện ta có $m = \frac{-16}{19}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.	0,25
4	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), D là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC của đường tròn (O), H là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Hai điểm K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB và AC. a) Chứng minh $AL.CB = AB.KL$. b) Lấy điểm E trên đoạn thẳng AD sao cho $BD = DE$. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. c) Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (K nằm giữa M, L). Chứng minh $AM = AN = AH$.	3,0



a) Chứng minh $AL.CB = AB.KL$.

1

Xét hai tam giác AKL và ACB , có:

+ $\hat{A}$ chung

$$+ AK.AB = AH^2 = AL.AC \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AB}.$$

Suy ra hai tam giác AKL và ACB đồng dạng.

0,5

$$\text{Suy ra } \frac{AL}{AB} = \frac{KL}{CB} \Rightarrow AL.CB = AB.KL.$$

0,5

b) Lấy điểm E trên đoạn thẳng AD sao cho $BD = DE$. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

1,0

Ta có D là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC nên AE là đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC . (*)

0,25

$$+ \text{ Tam giác } DBE \text{ cân tại } D \text{ nên: } \widehat{BED} = \widehat{EBD} \quad (1).$$

0,125

$$+ \widehat{BED} = \widehat{BAD} + \widehat{ABE} = \widehat{BCD} + \widehat{ABE} = \widehat{DBC} + \widehat{ABE} \quad (2).$$

0,25

$$+ \text{ Ta có } \widehat{EBD} = \widehat{DBC} + \widehat{EBC} \quad (3)$$

0,125

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$ hay BE là phân giác trong của góc B của tam giác ABC (**).

0,25

Từ (*) và (**) suy ra E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

c) Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (K nằm giữa

1,0

	M, L). Chứng minh $AM = AN = AH$.	
	+ Hai tam giác AKL và ACB đồng dạng. Suy ra $\widehat{ALK} = \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{sdAM} + \widehat{sdNC}) = \frac{1}{2}\widehat{sdAC}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{sdAM} + \widehat{sdNC}) = \frac{1}{2}(\widehat{sdAN} + \widehat{sdNC})$ $\Rightarrow \widehat{sdAM} = \widehat{sdAN} \Rightarrow AN = AM$ (4)	0,5
	+ Chứng minh được hai tam giác ALN và ANC đồng dạng vì có góc A chung và $\widehat{ANL} = \widehat{ACN}$ (cùng chắn 2 cung bằng nhau). Suy ra $\frac{AL}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AN^2 = AL.AC$. Mà $AL.AC = AH^2 \Rightarrow AN = AH$ (5) Từ (4) và (5) ta suy ra $AM = AN = AH$.	0,5
5	a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$ b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.	1,0
	a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$	0,5
	Ta có $(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$ $\Leftrightarrow (2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7$ $\Leftrightarrow (2x+y-5)(x-y+3)=7$	0,125
	Vì $7=1.7=7.1=(-1).(-7)=(-7).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp xảy ra.	0,125
	TH1: $\begin{cases} 2x+y-5=1 \\ x-y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{-2}{3} \end{cases}$ (loại). TH2: $\begin{cases} 2x+y-5=7 \\ x-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{16}{3} \end{cases}$ (loại).	0,125
	TH3: $\begin{cases} 2x+y-5=-1 \\ x-y+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn) TH4: $\begin{cases} 2x+y-5=-7 \\ x-y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-2; 8)$ và $(-2; 2)$	0,125
	b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.	0,5

	Ta có $2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1) = b^2$ (*) Gọi $d = (a-b, 2a+2b+1)$ với $d \in \mathbb{N}^*$ Suy ra $\begin{cases} (a-b):d \\ (2a+2b+1):d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1):d^2 \Rightarrow b^2:d^2 \Rightarrow b:d$.	0,25
	Vì $(a-b):d \Rightarrow a:d \Rightarrow (2a+2b):d$ mà $(2a+2b+1):d$ nên $1:d \Rightarrow d=1$	0,125
	Do đó $(a-b, 2a+2b+1)=1$. Từ (*) ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương. Vậy $2a+2b+1$ là số chính phương.	0,125
6	Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: a) $\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$. b) $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.	1,0
	a) $\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$.	0,5
	Ta có $\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2}$.	0,25
	Theo BĐT Cauchy ta có $a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}$.	0,25
	b) $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.	0,5
	Tương tự theo câu a) ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}$, $\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}$. Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có: $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$.	0,125
	Ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a^3}{a^2 + \frac{a^2+b^2}{2} + b^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{a^2+b^2}$.	0,125
	Tương tự ta có $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{b^2+c^2}$, $\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{c^3}{c^2+a^2}$.	0,125
	Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \right) \geq \frac{a+b+c}{3}$.	0,125