

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán học

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 02/12/2022

(Đề thi này gồm có 01 trang, có 5 bài)

Bài 1. (4,0 điểm). Cho dãy số thực dương (u_n) có $u_1 \in (0;1)$ và thỏa bất đẳng thức

$$u_{n+1} < u_n - u_n^2; \forall n = 1; 2; 3 \dots$$

a. Tính $\lim(n^\alpha \cdot u_n)$ với $\alpha \in (0;1)$ là số thực cho trước.

b. Tồn tại hay không hằng số $c > 0$ sao cho $\frac{1}{n+c} < u_n; \forall n = 1; 2; 3 \dots$

Bài 2. (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Lấy E, F trên đoạn AC, AB và các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai tương ứng X, Y . Hai đường thẳng BE, CF cắt nhau ở I và hai đường thẳng EY, XF cắt nhau ở D , đường thẳng ID lần lượt cắt hai đường thẳng EF, XY tương ứng tại G, L .

a. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AG và BC , N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AG và đường tròn (O) , M là trung điểm BC . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tiếp xúc đường tròn (O) .

b. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AL và đường tròn (O) , Q là giao điểm của hai đường thẳng PB và EF . Chứng minh rằng hai đường thẳng QA và PF cắt nhau tại một điểm nằm trên (O) .

Bài 3. (4,0 điểm). Cho trước 80 viên bi và xét n chiếc hộp (n nguyên dương). Số n gọi là có tính *kết hợp* nếu bất kì số nguyên dương k ($1 < k \leq 80$) và bất kì cách chia 80 viên bi vào n hộp này (hộp nào cũng có ít nhất một viên bi), ta luôn tìm ra một hoặc một số hộp có tổng số viên bi trong các hộp đó là k .

a. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương $n \leq 40$ thì n không có tính *kết hợp*.

b. Chứng minh rằng $n = 50$ có tính *kết hợp*.

Bài 4. (4,0 điểm). Với số nguyên dương $n > 1$, ta kí hiệu $f(n)$, $g(n)$ lần lượt là ước nguyên tố lớn nhất và tổng các ước nguyên tố phân biệt của n . Ví dụ $f(45) = 5; g(45) = 8$.

a. Cho a là số nguyên dương chẵn, p nguyên tố lẻ. Chứng minh $f\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = p$ hoặc

$$f\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) \geq 2p+1.$$

b. Chứng minh rằng $g(2^n+1) \geq g(n)+3$ với mọi số nguyên dương lẻ $n > 3$.

Bài 5: (4,0 điểm). Cho đa thức $f(x)$ monic thỏa $f(0)=1$ và đặt $g(x) = f(x) \cdot (x+1)^k; k \in \mathbb{Z}^+$.

a. Cho $f(1) = -1$, tồn tại hay không giá trị nguyên dương k để khi khai triển $g(x)$ thì các hệ số đều dương?

b. Cho $f(x)$ bậc 2 và có 2 nghiệm dương phân biệt, chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, luôn tồn tại số nguyên dương k để khai triển $g(x)$ thì số các hệ số âm luôn lớn hơn n

-----**HẾT**-----