

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC: 2023-2024
MÔN: TOÁN CHUYÊN
Ngày thi: 12/06/2023
Thời gian làm bài: 150 phút**

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8$
- 2) Cho a, b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Cho ba số nguyên a, b và c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.
- 2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0$.

Câu 3. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) sao cho xy là số chính phương và $x^2 + xy + y^2$ là số nguyên tố.
- 2) Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + 6b + 6c)(a + b + c)$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH . Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K .

- 1) Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM .
- 2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S , đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T . Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.
- 3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P . Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

- 1) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.
- 2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{7}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-3-2x+7}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}} = 2(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}} = 2(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \text{ (TMDK)} \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \text{ (TMDK)} \\ \sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7} = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{x-3} \geq 0 \\ \sqrt{2x-7} \geq 0 \end{cases}$ với mọi $x \geq \frac{7}{2}$ nên $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7} \geq 0 > -2$ với mọi $x \geq \frac{7}{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $x=4$.

2) Cho a, b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 - c^2 = c \\ c^2 - b^2 = b \\ b^2 - a^2 = a \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\text{Ta có } a^2 - c^2 = c \Leftrightarrow (a-c)(a+c) = c \Rightarrow (a-c)(-b) = c \Leftrightarrow b(c-a) = c$$

$$\text{Tương tự ta có } c^2 - b^2 = b \Rightarrow a(b-c) = b; b^2 - a^2 = a \Rightarrow c(a-b) = a.$$

$$\text{Do đó } b(c-a)a(b-c)c(a-b) = abc \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 1 \text{ (do } abc \neq 0).$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Cho ba số nguyên a, b và c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

Lời giải

- Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 thì a^2, b^2, c^2 chia cho 3 dư 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 3 \\ abc \not\equiv 3 \end{cases} \Rightarrow M \not\equiv 3 \text{ (vô lý)}$$

- Nếu a, b, c có một hoặc hai số không chia hết cho 3 và các số còn lại chia hết cho 3

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 3 \\ abc \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow M \not\equiv 3 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy } a, b, c \equiv 3 \Rightarrow abc \equiv 27 \text{ (1)}$$

- Lại có, nếu a, b, c đều lẻ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 2 \\ 2abc \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow M \not\equiv 2 \text{ (vô lý)}$

$$\text{Vậy } a, b, c \text{ có ít nhất một số chẵn} \Rightarrow abc \equiv 2 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow abc:54$ vì $(2,27)=1$.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0$.

Lời giải

$$x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow xy(x^2 - x + 1) = (2x - y)^2 \quad (1)$$

Gọi $d = (x; y) \Rightarrow x = da; y = db$ với $(a; b) = 1$ và a, b, d nguyên dương.

Khi đó (1) trở thành $d^2ab(d^2a^2 - da + 1) = d^2(2a - b)^2 \Leftrightarrow ab(d^2a^2 - da + 1) = (2a - b)^2$.

Suy ra $(2a - b)^2 : a$ và $(2a - b)^2 : b$

Ta có $(2a - b)^2 : a$ mà $(a; b) = 1 \Rightarrow (2a - b; a) = 1 \Rightarrow ((2a - b)^2; a) = 1$ do đó $a = 1$.

$$\text{Từ } (2a - b)^2 : b \Rightarrow 4a^2 : b \text{ mà } (a; b) = 1 \Rightarrow 4 : b \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 2 \text{ (do } b > 0) \\ b = 4 \end{cases}$$

+) TH1: $a = b = 1 \Rightarrow x = y = d$.

Thay vào giả thiết ta được $d^4 - d^3 = 0 \Rightarrow d = 1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

+) TH2: $a = 1; b = 2$ không thỏa mãn.

+) TH3: $a = 1; b = 4$ suy ra $x = d; y = 4d$

Thay vào giả thiết ta được $d^4 - d^3 = 0 \Rightarrow d = 1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy cặp số $(x; y) \in \{(1; 1); (1; 4)\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) sao cho xy là số chính phương và $x^2 + xy + y^2$ là số nguyên tố.

Lời giải

$$\text{Đặt } d = (x; y) \Rightarrow \begin{cases} x = ad \\ y = bd \end{cases} \text{ với } (a; b) = 1$$

$$\text{Suy ra } M = x^2 + xy + y^2 = d^2(a^2 + ab + b^2)$$

Vì $a^2 + ab + b^2 \geq 3$ nên $d = 1$, suy ra $(x; y) = 1$.

Mà xy là số chính phương nên $xy \geq 0; |x|, |y|$ đều là số chính phương $\Rightarrow |x| = m^2; |y| = n^2$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

$$M = m^4 + m^2n^2 + n^4 = (m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$$

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì M không là số nguyên tố nên $x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*$

Do đó $m^2 + mn + n^2 \geq 3$

Mà M là số nguyên tố nên $m^2 - mn + n^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + (m - n)^2 = 2 \Rightarrow m = n = 1$

Vậy $(x; y) \in \{(1; 1); (-1; -1)\}$.

2) Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + 6b + 6c)(a + b + c)$.

Lời giải

Đặt $x = b + c$

$$\begin{cases} 2x = 1 - a - c \leq 1 - a \\ 3x = 1 + b - a \geq 1 - a \end{cases}$$

- Tìm GTLN của P

$$P \leq (a+3)(1-a) \left(a + \frac{1-a}{2} \right) = \frac{1}{4}(3-2a)(2+2a) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(3-2a+2+2a)^2}{4} = \frac{25}{16}$$

Vậy GTLN của $P = \frac{25}{16}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $c = 0, a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{8}$.

- Tìm GTNN của P

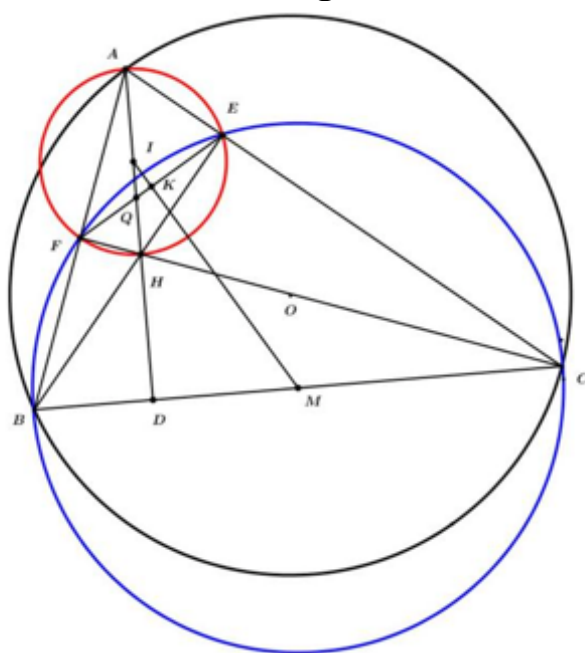
$$P \geq \left[a + 2(-a) \right] \left[a + \frac{1-a}{3} \right] = \frac{1}{3}(2a^2 + 5a + 2) \geq \frac{2}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0, c = \frac{1}{3}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH . Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K .

1) Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM .

Lời giải



I là tâm đường tròn ngoại tiếp $AFHE$ (nội tiếp)

M là tâm đường tròn ngoại tiếp $BFEC$ (nội tiếp)

$$\Rightarrow \begin{cases} IM \perp EF \\ EK = KF \end{cases} \text{ (đường nối tâm)}$$

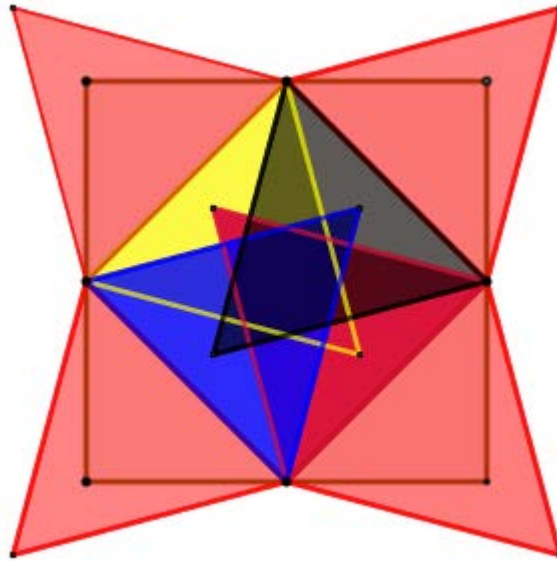
$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (BFEC (nt))}$$

2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S , đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T . Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.

3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P . Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.

$$\triangle AEF \cong \triangle ABC$$

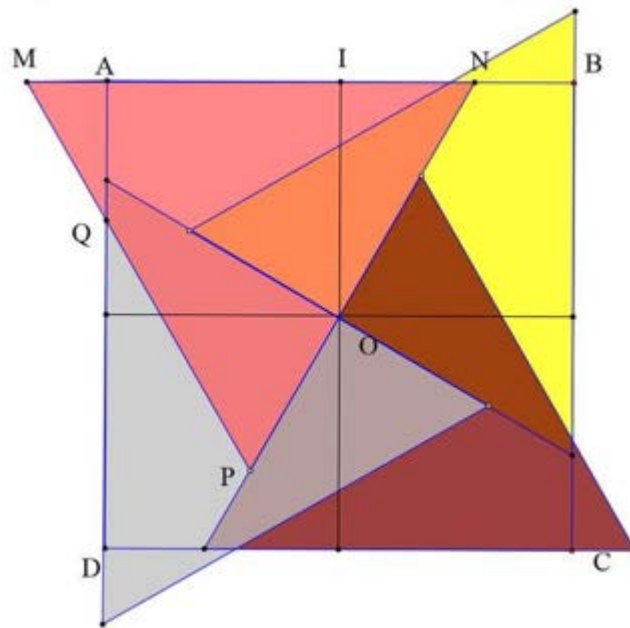
a) Dựng 8 tam giác đều có cạnh bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ hoàn toàn hình vuông như hình vẽ dưới do $2023 = 252 \cdot 8 + 7$ nên có ít nhất một tam giác đều phủ ít nhất 253 điểm.



2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

Lời giải

Dựng MNP tam giác đều có cạnh bằng $\frac{11}{12}$ đi qua tâm O của hình vuông như hình vẽ dưới



Ta có: $IN = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow NB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ và $AQ = MA \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \sqrt{3}$ ta thấy $AQ > NB$ nên bốn tam giác đều có cạnh bằng $\frac{11}{12}$ phủ kín hình vuông có cạnh bằng 1. Mặt khác ta có $2023 = 4.505 + 3$ nên có ít nhất một tam giác đều phủ ít nhất 506 điểm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Môn thi: **TOÁN (chuyên Toán)**

Ngày thi: 12/6/2023

Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$

2) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b, b^2 - a^2 = a$

Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Cho 3 số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0$.

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho xy là số chính phương và $x^2 + xy + y^2$ là số nguyên tố.

2) Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + 6b + 6c)(a + b + c)$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . $EF \cap AD = Q$. M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH . $IM \cap EF = K$.

1) Chứng minh $\triangle AEK$ đồng dạng với $\triangle ABM$.

2) $EF \cap BC = S, SI \cap MQ = T$. Chứng minh A, T, H, M đồng viên.

3) Tia TH cắt (O) tại P . Chứng minh A, K, P thẳng hàng.

Câu V (1,0 điểm)

Cho 2023 điểm nằm trong 1 hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

1) Chứng minh rằng tồn tại 1 tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.

2) Chứng minh rằng tồn tại 1 tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Điều kiện xác định $x \geq \frac{7}{2}$

Sử dụng nhân liên hợp, ta có phương trình ban đầu tương đương với

$$\frac{x-3-2x+7}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}} = 2x-8$$

Chuyển vế, rút nhân tử chung ta được

$$(x-4)\left(2+\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}\right)=0$$

Ta có $\sqrt{x-3} \geq 0, \sqrt{2x-7} \geq 0$ nên $2+\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}} > 0$ với mọi $x \geq \frac{7}{2}$, kéo theo $x=4$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$

2) Theo đề bài ta có $a^2 - c^2 + c^2 - b^2 = c + b$ và $a, b, c \neq 0$ nên $a^2 - b^2 = c + b$. Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b$. Tuy nhiên khi đó $a = b^2 - a^2 = 0$ là trái giả thiết. Do đó, ta phải có $a + b \neq 0$ dẫn tới $a - b = \frac{c+b}{a+b}$

Hoàn toàn tương tự ta có $b - c = \frac{c+a}{b+c}$ và $c - a = \frac{a+b}{c+a}$

Từ đây ta suy ra

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{c+b}{a+b} \cdot \frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} = 1$$

Đây chính là điều phải chứng minh

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Nếu cả ba số a, b, c đều lẻ thì $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$ sẽ lẻ và do đó $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$ không chia hết cho 6, trái giả thiết. Do đó, trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chẵn, nghĩa là abc chia hết cho 2

Nếu abc không chia hết cho 3 tức là trong 3 số a, b, c không có số nào chia hết cho 3, dẫn tới $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Vì $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$ chia hết cho 3 nên $-2ab$ cũng chia hết cho 3, vô lí vì a, b, c đều không chia hết cho 3. Do đó, ta phải có abc chia hết cho 3. Từ đây ta có ngay $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3. Vì số chính phương khi chia 3 thì dư chỉ có thể là 0, 1 cả 3 số a^2, b^2, c^2 phải chia hết cho 3 kéo theo a, b, c đều chia hết cho 3. Khi đó abc chia hết cho 27

Vì $(27, 2) = 1$ nên abc chia hết cho $27 \cdot 2 = 54$. Phép chứng minh hoàn tất

2) Phương trình đã cho được viết lại thành

$$y^2 - (x^3 - x^2 + 5x)y + 4x^2 = 0$$

Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y , tính biệt thức

$$\Delta = (x^3 - x^2 - 5x)^2 - 16x^2 = x^2(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9)$$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm y nguyên là Δ là số chính phương. Suy ra $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9)$ là số chính phương (do x nguyên dương nên $x^2 > 0$). Vì

$x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$ là số lẻ và nếu gọi $d = \gcd(x^2 - x + 1, x^2 - x + 9)$ thì d lẻ và $d(x^2 - x + 9) - (x^2 - x + 1) = 8$ nên ta phải có $d = 1$. Suy ra $x^2 - x + 1, x^2 - x + 9$ đều là các số chính phương. Mà

$$(x-1)^2 < x^2 - x + 1 < (x+1)^2$$

nên $x^2 - x + 1 = x^2$ và tìm được $x = 1$. Thay $x = 1$ tìm được $y = 1, y = 4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương (x, y) là $(1, 1)$ và $(1, 4)$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Đặt $xy = z^2$ với $z \in \mathbb{N}$ thì $x^2 + xy + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y)^2 - z^2 = (x+y-z)(x+y+z)$ Chú ý là $xy = z^2 \geq 0$ nên x, y ở cùng phía với 0. Và nếu cặp (x, y) thỏa mãn thì cặp $(-x, -y)$ cũng thỏa mãn, do đó ta chỉ cần xét $x, y \geq 0$. Khi đó $x+y+z \geq x+y-z$ và do $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố nên ta phải có $x+y+z=1, x^2 + y^2 + z^2 = x+y+z$. Do $x, y, z \in \mathbb{N}$ nên

$x^2 \geq x, y^2 \geq y, z^2 \geq z$ nên để có đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 = x+y+z$ thì

$x^2 = x, y^2 = y, z^2 = z$. Vậy, có hai cặp (x, y) là $(1, 1), (-1, -1)$

2) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{3}{2}P \geq \left(\frac{1}{2}a + 3b + 3c \right) (3a + 3b + 3c) \geq \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a + 3b + 3c \right)^2 \geq (a + 2b + 3c)^2 = 1$$

Suy ra $P \geq \frac{2}{3}$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 0, c = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$

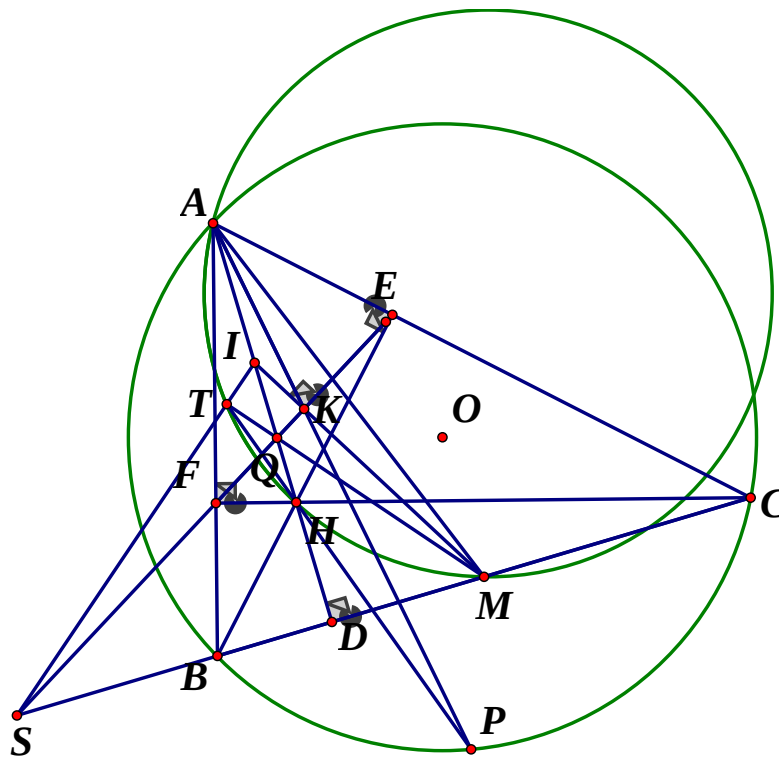
Lại có, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$4P = (a + 6b + 6c)(4a + 4b + 4c) \leq \frac{(a + 6b + 6c + 4a + 4b + 4c)^2}{4} \leq \frac{25(a + 2b + 3c)^2}{4} = \frac{25}{4}$$

kéo theo $P \leq \frac{25}{16}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{8}, c = 0$. Vậy giá lớn nhất của P là $\frac{25}{16}$

Câu 4 (3,0 điểm)



1) Xét các tam giác BFC và BEC lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FM và EM , khi đó ta được $FM = EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, xét các tam giác AFH và AEH lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FI và EI , khi đó ta cũng được FI

$= EI = \frac{1}{2} AH$. Như vậy, MI là đường trung trực của EF , vì thế K là trung điểm của EF . Mặt

khác, lại chú ý rằng $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g)$ nên ta được $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, kéo theo

$\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$. Từ đó ta thu được $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$. Do đó,

$\triangle AEK \sim \triangle ABM (c.g.c)$

2) Xét $\triangle ISM$ với $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ (vì MI là trung trực của EF), vì thế Q là trực tâm của $\triangle ISM$. Như vậy, $MQ \equiv MT \perp SI$ và từ đó ta được $\widehat{ITM} = 90^\circ = \widehat{IEM} = \widehat{IFM}$. Do đó, năm điểm I, T, E, F, M cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến $QT.QM = QE.QF$. Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác $AEFH$ là tứ giác nội tiếp, ta cũng có $QE.QF = QA.QH$. Như vậy, $QT.QM = QA.QH$, vì vậy bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn

3) Trên tia TH lấy một điểm P' sao cho $HT.HP' = HA.HD$. Khi đó, ta cũng được $HT.HP' = HB.HE = HC.HF$ và do đó các tứ giác $TBP'E$ và $TCP'F$ là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác $TIEF$ nội tiếp nên $\widehat{EFT} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\begin{aligned}\widehat{BP'C} &= \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360^\circ - \widehat{EHF} - \widehat{EFT} \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) - 2\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}\end{aligned}$$

Do đó $P' \in (O)$ và kéo theo $P' \equiv P$. Như vậy, $HA.HD = HT.HP$ nên tứ giác $ATDP$ nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$. Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\triangle AEK \sim \triangle ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} + \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và $IM \parallel AO$ ($\perp EF$). Lại chú ý rằng các tứ giác $ATHM$ và $ITDM$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}$$

Do đó, $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra A, P, K thẳng hàng

Câu 5 (1,0 điểm)

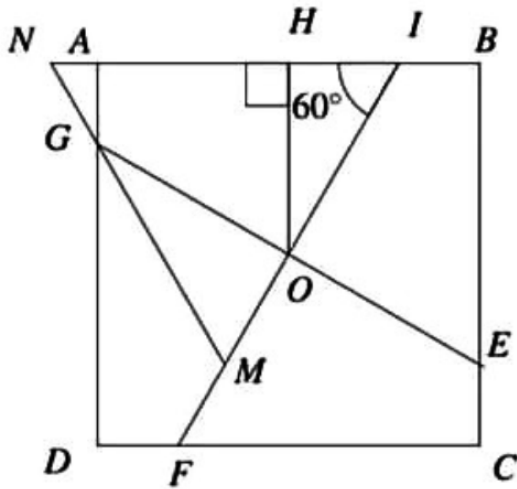
1) Mỗi một phần đều là tam giác vuông cân với độ dài cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$

Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 8 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần có chứa ít nhất

$$\left\lceil \frac{2023}{8} \right\rceil + 1 = 253 \text{ điểm}$$

Nói cách khác, tồn tại một tam giác vuông cân có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ chứa ít nhất 253 điểm. Mà tam giác vuông cân có cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$ thì sẽ chứa trong một tam giác đều có cạnh bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có điều phải chứng minh

2) Gọi hình vuông được cho là $ABCD$ với tâm O . Ta sử dụng hai đường vuông góc IF, EG đi qua O và tạo với các cạnh một góc 60° để chia hình vuông thành 4 tứ giác $AIOG, BIOE, CEOF, DFOG$ như hình vẽ



Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 4 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần phủ ít nhất

$$\left\lceil \frac{2023}{4} \right\rceil + 1 = 506 \text{ điểm}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác $AIOG$ phủ ít nhất 506 điểm. Ta dựng tam giác đều IMN sao cho $A \in IN, O \in IM$ và $G \in MN$ như hình vẽ. Kẻ $OH \perp AB$. Ta có

$$OI = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Tương tự } OG = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Ta lại có } OM = \frac{OG}{\tan 60^\circ} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra

$$IM = OI + OM = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} < \frac{11}{12}$$

Như vậy tam giác đều IMN có cạnh nhỏ hơn $\frac{11}{12}$, suy ra tồn tại tam giác đều phủ toàn bộ tam giác đều IMN . Tam giác đều ấy do đó phủ toàn bộ tứ giác $AIOG$, suy ra nó cũng phủ ít nhất 506 điểm đ