

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 3}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{1}{x - 4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $\frac{4}{A}$ là số nguyên.

Bài 2. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = (k - 1)x + 3$ (k là tham số) và hai điểm $A(0; 3)$, $B(-1; 0)$. Tìm các giá trị của k để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm C sao cho diện tích tam giác OAC gấp ba lần diện tích tam giác OAB.

b) Giải phương trình $2x^2 + x + \sqrt{x^2 + 2x} = 2x\sqrt{x^2 + 2x}$

Bài 3. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y \left(1 + \frac{1}{xy - x^2} \right) = 5 \\ (2x^2 - 2xy + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^4 - 2x^3y + x^2y^2} \right) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $(x - y)^2 = xy - x^2 - 2x + y + 1$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF

Chứng minh rằng $S_{DEF} = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) S_{ABC}$, với S_{DEF} , S_{ABC} lần lượt là diện tích của các tam giác DEF và ABC.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, E là một điểm trên cung nhỏ AD (E khác A và D). Gọi M là giao điểm của EC và OA, N là giao điểm của EB và OD.

a) Chứng minh rằng $AM \cdot ED = \sqrt{2} OM \cdot EA$

b) Xác định vị trí điểm E để $\frac{1}{AM} + \frac{1}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ac + 2bc = 3(c - 1)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{a^2 + 4b^2} + \frac{8b^3c^2}{4b^2c^2 + 9} + \frac{27}{9c + a^2c^3}$