

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH**  
**TỈNH ĐỒNG NAI**  
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**NĂM HỌC 2023-2024**

**Môn Toán**

Thời gian làm bài 180 phút

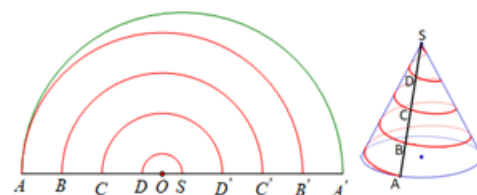
Ngày thi: 19/01/2024 (đề thi gồm một trang có mười câu).

**Câu 1.** (2,5 điểm) Tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 9$  và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

**Câu 2.** (2,5 điểm) Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình  $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$ .

**Câu 3.** (2 điểm)

Cho một tấm bìa là nửa hình tròn tâm  $S$  đường kính  $AA'$ . Trên đoạn  $AA'$  lần lượt lấy các điểm  $B, C, D, D', C', B'$  thỏa mãn  $AB = BC = CD = DS = SD' = D'C' = C'B' = B'A'$ , gọi  $O$  là trung điểm của  $SD$ . Lần lượt vẽ các nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $DS, CD', BC', AB'$ . Dán hai bán kính  $SA$  với  $SA'$  sao cho  $A$  trùng  $A'$ ,  $B$  trùng  $B'$ ,  $C$  trùng  $C'$ ,  $D$  trùng  $D'$  để tạo thành hình nón đỉnh  $S$  mà trên mặt xung quanh có đường xoắn ốc từ  $A$  đến  $S$  gồm các cung tròn đi qua  $A, B, C, D, S$  (như hình vẽ minh



họa). Tính độ dài đường xoắn ốc, biết thể tích khối nón bằng  $\frac{64\sqrt{3} \cdot \pi}{3}$ .

**Câu 4.** (2 điểm) Cho hàm số  $f(x) = \ln\left(\frac{2024x}{x+2}\right)$ . Tìm đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số đã cho. Chứng minh  $f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) < \frac{3}{2}$ .

**Câu 5.** (2,5 điểm) Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có diện tích tam giác  $ABC'$  bằng  $9a^2$ , biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'B'$  và  $BC'$  bằng  $2a$ , với  $a > 0$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

**Câu 6.** (2 điểm) Hỏi có bao nhiêu cách sắp 6 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn tủ khác nhau sao cho mỗi ngăn tủ có ít nhất một quyển sách? (Biết mỗi ngăn tủ có thể chứa được từ 1 đến 6 quyển sách và không kể thứ tự các quyển sách trong mỗi ngăn tủ).

**Câu 7.** (1 điểm) Chứng minh  $C_{2n}^n$  là số chẵn, với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Câu 8.** (2 điểm) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \\ x^2 + \sqrt{x+y-1} = \sqrt{2-x} \end{cases} \quad (\text{với } x, y \in \mathbb{R}).$$

**Câu 9.** (2 điểm) Cho ba số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$ .

**Câu 10.** (1,5 điểm) Cho hàm số  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b$ , với mọi số hữu tỷ  $a, b$  (ký hiệu tập hợp các số hữu tỷ là  $\mathbb{Q}$ ). Chứng minh  $f$  là hàm số lẻ.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .... Trường: ...