

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LẠNG SƠN**

**KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn thi: Toán lớp 9 THCS

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 18/3/2021

Bài 1: (4 điểm)

Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy} \right) \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P với $y = 9 + 4\sqrt{5}$.

Bài 2: (4 điểm)

Cho phương trình $mx^2 + 2(m-2)x + m-3 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2.$$

Bài 3: (4 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x^6 + y^6 + 15y^4 + z^3 + 75y^2 = 3x^2y^2z + 15x^2z - 125$$

Bài 4: (6 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là một điểm di động trên đoạn thẳng OA (H khác O và $HA > HO$). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M . Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên OB .

a) Chứng minh $\widehat{BMK} = \widehat{MAB}$.

b) Các tiếp tuyến của $(O; R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O; R)$ lần lượt tại D và E . OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G . Chứng minh rằng $OE \cdot OG = OF \cdot OD$.

c) Tìm vị trí điểm H để chu vi tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: (2 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$Q = \frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)}.$$

b) Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – LẠNG SƠN (2020 – 2021)

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1-\sqrt{xy}) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy})}{(1+\sqrt{xy})(1-\sqrt{xy})} \cdot \frac{1-xy}{1+x+y+xy} \\ &= \frac{\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{1-xy} \cdot \frac{1-xy}{1+x+y+xy} \\ &= \frac{-2x\sqrt{y}-2\sqrt{y}}{1+x+y+xy} = \frac{-2\sqrt{y}(x+1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{-2\sqrt{y}}{y+1} \end{aligned}$$

b) Với $y = 9 + 4\sqrt{5} = 4 + 2 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$. Ta được:

$$P = \frac{-2(2+\sqrt{5})}{9+4\sqrt{5}+1} = \frac{-2(2+\sqrt{5})}{10+4\sqrt{5}} = \frac{-2(2+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Bài 2.

a) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm trái dấu là:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4m + 4 - m^2 + 3m > 0 \\ \frac{m-3}{m} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < m < 3$$

b) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì: $\Delta' > 0 \Rightarrow m < 4$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$\text{Áp dụng Viet ta có: } x_1 + x_2 = \frac{-2(m-2)}{m}; x_1 x_2 = \frac{m-3}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{4(m-2)^2}{m^2} - 2 \cdot \frac{m-3}{m} = 2 \cdot \frac{(m-3)^2}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 3.

a) Điều kiện: $x \geq 1; y \geq 0$

Ta có:

$$xy + x + y = x^2 - 2y^2$$

$$\Leftrightarrow xy + x + y = x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+1) = (x-y)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow y+1 = x-y \text{ (vì } x+y \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 2y + 1$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x-1} = 4x - 2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - (x-1)\sqrt{x-1} = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 2 = 0 \text{ (Vì } x+1 \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Vậy $(x;y)=(5;2)$

b) Đặt $x^2 = a, y^2 = b$ ($a, b > 0$)

Phương trình tương đương với:

$$a^3 + b^3 + 15b^2 + z^3 + 75b = 3abz + 15az - 125$$

$$\Leftrightarrow a^3 + z^3 + b^3 + 125 + 15b(b+5) - 3az(b+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + z^3 + (b+5)(b^2 - 5b + 25) + 15b(b+5) - 3az(b+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + z^3 + (b+5)(b^2 + 10b + 25 - 3az) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + z^3 + (b+5)^3 - 3az(b+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + z^3 + (b+5)^3 = 3az(b+5)$$

Vì a, b, z nguyên dương nên: $a^3 + z^3 + (b+5)^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 z^3 (b+5)^3} = 3az(b+5)$

Dấu “=” xảy ra khi:

$$a = z = b + 5$$

$$\Rightarrow x^2 = z = y^2 + 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 + 5 \\ x^2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 5 \\ z = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy $(x;y;z)=(3;2;9)$

Bài 4.

$$\Rightarrow MN \perp OK \Rightarrow \text{là trung điểm của MN}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMK} = \widehat{MAB}$$

$$\widehat{MEO} = 90^{\circ} - \widehat{MOE}$$

$$\Rightarrow \frac{OF}{OE} = \frac{OG}{OD} \Rightarrow OF \cdot OD = OE \cdot OG$$

$$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O).

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AM $\Rightarrow H$ là trung điểm đoạn AO.

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi ΔMAB là $2R + AB$.

Gọi I là giao điểm của AO và BC

$$\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}.$$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB = (2 + \sqrt{3})R$.

Bài 5.

a) Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, ta có: $\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

Tương tự: $\frac{1}{y^2 + z^2} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$, $\frac{1}{z^2 + x^2} = \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}$

Ta được: $Q = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{y^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{z^2}{z(x^2 + y^2)}$

Và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có:

$$x(y^2 + z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2x^2(y^2 + z^2)(y^2 + z^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2x^2 + y^2 + z^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x(y^2 + z^2)} \geq \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

Tương tự: $\frac{y^2}{y(z^2 + x^2)} \geq \frac{y^2}{4\sqrt{2}}$; $\frac{z^2}{z(x^2 + y^2)} \geq \frac{z^2}{4\sqrt{2}}$

Suy ra: $Q \geq \frac{x^2}{4\sqrt{2}} + \frac{y^2}{4\sqrt{2}} + \frac{z^2}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy $\min Q = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng.

Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm cùng màu.

Giả sử ba điểm đó là ba điểm A, B, C cùng có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, chỉ có 2 trường hợp xảy ra:

- Nếu G là màu đỏ, khi đó A, B, C, G có cùng màu đỏ và bài toán được chứng minh.

- Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA$, $BB' = 3GB$, $CC' = 3GC$. Khi đó nếu M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì $AA' = 3GA = 6GM \Rightarrow AA' = 2AM$. Tương tự $BB' = 2BN$, $CC' = 2CP$. Do đó các tam giác $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, tam