

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Cho phương trình $x^2 - 8x + 4 - 8m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$
- b) Gọi a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b - c = \sqrt{3}$.
Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc$

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, Biết $P(-2) = 29$, $P(1) = -5$ và $P(3) = 1$
- b) Cho n số nguyên dương sao cho $4n + 13$ và $5n + 16$ là các số chính phương.
Chứng minh rằng $2023n + 45$ chia hết cho 24

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình $2(17x^2 - 6) + (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x + 5} = 2x(3x^2 + 22)$
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(146; 2022)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox . Tìm số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên)

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R > R'$ và O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại C và M , đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại N và D ($C, D, M, N \neq A$). Gọi K là trung điểm của CD ; H là giao điểm của CN và DM

- a) Chứng minh rằng năm điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn
- b) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD ; E là điểm đối xứng của C qua B ; P là giao điểm của AE và HD ; F là giao điểm của BH với (I) ($F \neq H$); Q là giao điểm của CF với BP . Chứng minh rằng $BP = BQ$
- c) Chứng minh rằng $\angle IBP = 90^\circ$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức :
$$P = \frac{x^4}{(x+y)^4} + \frac{y^4}{(y+z)^4} + \frac{z^4}{(z+x)^4}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Cho phương trình $x^2 - 8x + 4 - 8m = 0$ (1) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 12 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 4 - 8m \end{cases}$

Ta có $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 > 2 \\ 4 - 8m - 8 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{8}$

Vậy $-\frac{3}{2} < m < -\frac{3}{8}$ là các giá trị cần tìm

d) Gọi a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b - c = \sqrt{3}$.

Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

Mà $a + b - c = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3} \Rightarrow A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc = 11$

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, Biết $P(-2) = 29$,

$P(1) = -5$ và $P(3) = 1$

Vì $P(-2) = -29$ nên ta có $-8 + 4a - 2b + c = -29 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = -21$

$P(1) = -5 \Rightarrow 1 + a + b + c = -5 \Leftrightarrow a + b + c = -6$

$P(3) = 1 \Leftrightarrow 27 + 9a + 3b + c = 1 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -26$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 4a - 2b + c = -21 \\ a + b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -5 \end{cases}$

Vậy $a = -3, b = 2, c = -5$

d) Cho n số nguyên dương sao cho $4n + 13$ và $5n + 16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n + 45$ chia hết cho 24

Giả sử $4n+13=a^2$ và $5n+16=b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$), từ $4n+13=a^2 \Rightarrow a$ là số lẻ

$$\text{Ta có } 4n+13=a^2 \Leftrightarrow 4(n+3)=a^2-1 \Leftrightarrow 4(n+3)=(a-1)(a+1)$$

Vì a là số lẻ nên $a-1; a+1$ là hai số chẵn liên tiếp, do đó $(a-1)(a+1):8$

$$\Rightarrow (n+3):2 \Rightarrow n \text{ là số lẻ} \Rightarrow b^2=5n+16 \text{ là số lẻ}$$

$$\text{Lại có } 5n+16=b^2 \Leftrightarrow 5(n+3)=(b-1)(b+1):8, \text{ Mà } (5,8)=1 \Rightarrow (n+3):8(1)$$

$$\text{Ta có } a^2+b^2=9n+29 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\text{Mà } a^2 \equiv \{0,1\} \pmod{3}, b^2 \equiv \{0,1\} \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+13 \equiv 1 \pmod{3} \\ 5n+16 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (n+3) \equiv 0 \pmod{3} (2)$$

Vì $(3,8)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra $(n+3):24$

$$\text{Từ đó } 2023n+45=2016+7(n+3)+24:24 \pmod{24}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

$$\text{c) Giải phương trình } 2(17x^2-6)+(x^2-4x+3)\sqrt{2x+5}=2x(3x^2+22) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow 6x^3-34x^2+44x+12-(x^2-4x+3)\sqrt{2x+5}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)[6x^2-16x-4-(x-1)\sqrt{2x+5}]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ (tm)} \\ 6x^2-16x-4-(x-1)\sqrt{2x+5}=0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 6(x-1)^2-2(2x+5)-(x-1)\sqrt{2x+5}=0 \quad (3)$$

Khi $x=1$ không thỏa mãn phương trình (3). Khi $x \neq 1$

$$(3) \Leftrightarrow 2 \frac{2x+5}{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ 9x^2 - 26x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 4x^2 - 10x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{29}}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x \in \left\{ 3; \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9}; \frac{5 - \sqrt{29}}{4} \right\}$

d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(146; 2022)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox . Tìm số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên)

Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox nên $H(146; 0)$

Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy , suy ra $B(0; 2022)$

Gọi C là trung điểm của đoạn OA , suy ra $C(73; 1011)$

Điểm $M(x_0; y_0) (x_0; y_0 \in \mathbb{Z})$ là điểm nguyên nằm trong $\triangle OAH$ khi và chỉ khi điểm $M'(x_0'; y_0') (x_0'; y_0' \in \mathbb{Z})$ đối xứng với điểm M qua C nằm trong $\triangle OAB$

Do đó số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH bằng $\frac{1}{2}$ (số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $ABOH$ trừ đi số điểm nguyên nằm trên đoạn thẳng OA)

Số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $ABOH$ bằng $146 \cdot 2022 = 293045$

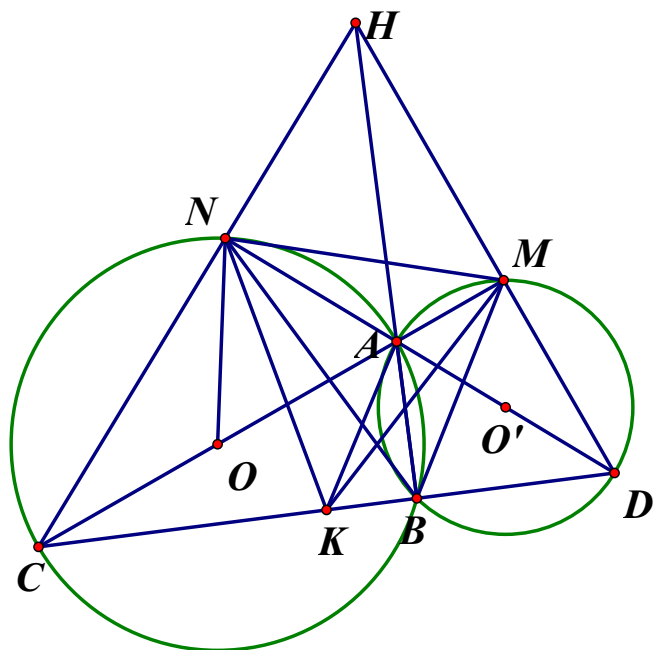
Phương trình đường thẳng OA là $y = \frac{1011}{73}x$. Từ đó kiểm tra được số điểm nguyên trên đoạn thẳng OA (trừ điểm O và A) bằng 1

Vậy số điểm nguyên trong $\triangle OAH$ bằng $\frac{293045 - 1}{2} = 146522$

Câu 4.(3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R > R'$ và O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại C và M , đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần

lượt tại N và D ($C, D, M, N \neq A$). Gọi K là trung điểm của CD ; H là giao điểm của CN và DM

d) Chứng minh rằng năm điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn



Ta có $\angle ANC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow AD \perp CH$

$\angle CMD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')) $\Rightarrow AC \perp DH$

Suy ra A là trực tâm $\triangle HCD \Rightarrow HA \perp CD \Rightarrow H, A, B$ thẳng hàng

Dễ có tứ giác $CDMN$ nội tiếp đường tròn tâm K

$\Rightarrow \angle MKN = 2\angle MCN$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \angle HCM = \angle HDN$ (1)

Ta có tứ giác $ABCN$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ACN = \angle ABN$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Tứ giác $ABDM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ADM = \angle ABM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Kết hợp với (1) suy ra $\angle ABN = \angle ABM = \angle ACN \Rightarrow \angle MKN = \angle MBN = 2\angle ACN$ (2)

Ta có $\angle MON = 2\angle ACN = \angle MBN$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra 5 điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn

e) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD ; E là điểm đối xứng của C

qua B ; P là giao điểm của AE và HD ; F là giao điểm của BH với

(I) ($F \neq H$); Q là giao điểm của CF với BP . Chứng minh rằng $BP = BQ$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương . Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức :
$$P = \frac{x^4}{(x+y)^4} + \frac{y^4}{(y+z)^4} + \frac{z^4}{(z+x)^4}$$

Ta có
$$P = \frac{1}{\left(\frac{y}{x} + 1\right)^4} + \frac{1}{\left(\frac{z}{y} + 1\right)^4} + \frac{1}{\left(\frac{x}{z} + 1\right)^4}$$

Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{(a+1)^4} + \frac{1}{(b+1)^4} + \frac{1}{(c+1)^4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có :

$$\frac{1}{(a+1)^4} + \frac{1}{16} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(a+1)^4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(a+1)^2} . \text{ Tương tự ta có :}$$

$$\frac{1}{(b+1)^4} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(b+1)^2} ; \quad \frac{1}{(c+1)^4} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(c+1)^2}$$

$$\Rightarrow P + \frac{3}{16} \geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} \right]$$

Ta chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$ với $a, b > 0$

Thật vậy: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow [(a+1)^2 + (b+1)^2](1+ab) \geq (a+1)^2 \cdot (b+1)^2$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2)(1+ab) \geq (ab + a + b + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2)(1+ab) \geq (ab + a + b)^2 + 2(ab + a + b) + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + ab(a^2 + b^2) \geq 2ab + a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + (ab-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi } a = b = 1$$

Tương tự có : $\frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^2} \geq \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+\frac{1}{ab}} = \frac{ab}{ab+1}$. Khi đó :

$$P \geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} \right] - \frac{3}{16} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{ab}{ab+1} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{16} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow x = y = z$$