

Đề chính thức
(Có 01 trang)

Môn: Toán (Chuyên)

Ngày thi: 15/7/2020

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ BÀI

Câu 1. (2,0 điểm).

1. Cho biểu thức: $P = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{2(a-1)}{\sqrt{a}-1}$ (với $a > 0, a \neq 1$).

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{y+3} = 1 \\ 4\sqrt{x-1} - \frac{3}{y+3} = 7 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm).

Cho phương trình: $x^2 - 5mx - 4m = 0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.

b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì:

$$x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 > 0.$$

Câu 3. (2,0 điểm).

a) Một con Robot được thiết kế có thể đi thẳng, quay một góc 90° sang phải hoặc sang trái. Robot xuất phát từ vị trí A đi thẳng $2m$ quay sang trái rồi đi thẳng $3m$, quay sang phải rồi đi thẳng $5m$ đến đích tại vị trí B . Tính khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot.

b) Cho hai số a, b thỏa mãn $a > b > 0$ và $a.b = 1$. Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$.

Câu 4. (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Kéo dài BE, AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại F và M .

a) Chứng minh $\triangle HAF$ cân.

b) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH = 2OI$.

c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

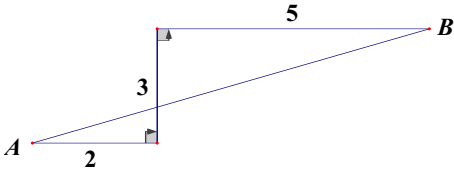
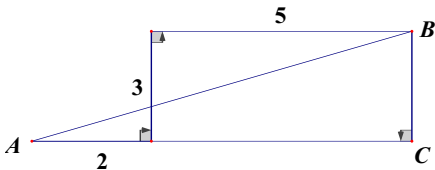
Câu 5. (1,0 điểm).

a) Cho $xy + yz + xz = 0$ và $xyz \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$.

b) Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.

..... **Hết**

Câu	Hướng dẫn	Điểm
1.1 (1,0đ)	Cho biểu thức: $P = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{2(a-1)}{\sqrt{a}-1}$ a) Rút gọn P .	
	Với $a > 0, a \neq 1 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}^3 - 1)}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + \frac{2(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} - 1}$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)}{a + \sqrt{a} + 1} - (2\sqrt{a} + 1) + 2(\sqrt{a} + 1) = a - \sqrt{a} + 1$	0,25
	b) Tính giá trị nhỏ nhất của P .	
	$P = a - \sqrt{a} + 1 = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ (Với $\forall a > 0, a \neq 1$)	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{3}{4}$ khi $a = \frac{1}{4}$.	0,25
1.2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{y+3} = 1 \\ 4\sqrt{x-1} - \frac{3}{y+3} = 7 \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \neq -3 \end{cases}$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \frac{1}{y+3} \end{cases}$ (điều kiện $u \geq 0$) $\Rightarrow \begin{cases} 2u + v = 1 \\ 4u - 3v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \frac{1}{y+3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy HPT có 1 nghiệm (2; -4)	0,25
2.a (1,0đ)	Phương trình: $x^2 - 5mx - 4m = 0$. a) Tìm m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.	
	Ta có: $\Delta = 25m^2 + 16m$	0,25
	Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow 25m^2 + 16m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{16}{25} \end{cases}$	0,25
	+) $m = 0$ nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{5m}{2} = 0$	0,25
	+) $m = -\frac{16}{25}$ nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{5m}{2} = -\frac{8}{5}$	0,25

2.b (1,0đ)	b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì $x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 > 0$.	
	PT có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì $\Delta = 25m^2 + 16m > 0$	0,25
	và $x_1^2 - 5mx_1 - 4m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 5mx_1 + 4m$ và $x_1 + x_2 = 5m$	0,25
	Xét $P = x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 = 5mx_1 + 4m + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1$ $= 5m(x_1 + x_2) + m^2 + 18m + 1 = 26m^2 + 18m + 1$	0,25
	Suy ra $P = 25m^2 + 16m + m^2 + 2m + 1 = \Delta + (m+1)^2 > 0$ (vì $\Delta > 0$). Đpcm.	0,25
3.a (1,0đ)	a) Một con Robot được thiết kế có thể đi thẳng, quay một góc 90° sang phải hoặc sang trái. Robot xuất phát từ vị trí A đi thẳng $2m$ quay sang trái rồi đi thẳng $3m$, quay sang phải rồi đi thẳng $5m$ đến đích tại vị trí B . Tính khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot.	
	Học sinh vẽ được hình minh họa 	0,25
	Kẻ $AC \perp BC$ như hình vẽ: 	0,25
	Ta có: $AC = 7; BC = 3$	0,25
	$\Rightarrow AB = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$ Vậy khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot là $\sqrt{58}$	0,25
3.b (1,0đ)	b) Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$. Với $a > b > 0$ và $a.b = 1$.	
	Vì $a.b = 1 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2}{a - b} = (a - b) + \frac{2}{(a - b)}$	0,25
	Do $a > b > 0 \Rightarrow (a - b) + \frac{2}{(a - b)} \geq 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{2}{(a - b)}} = 2\sqrt{2}$ (BĐT AM-GM)	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi: $(a - b) = \frac{2}{(a - b)} \Leftrightarrow (a - b)^2 = 2 \Leftrightarrow a - b = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow a - \frac{1}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} & (t/m) \\ a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} & (Loai) \end{cases} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$	0,25
	Vậy $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}; b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$	0,25
4.a	Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD, BE cắt	

(1,0đ)	nhau tại H . Kéo dài BE , AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại F và M . a) Chứng minh $\triangle HAF$ cân.	
	Vẽ hình đúng đến câu 4.a	
		0,25
	Ta có: $\angle AHF = \angle ACB$ (cùng phụ với $\angle DAE$)	0,25
	Lại có $\angle ACB = \angle AFB$ (cùng chắn cung AB)	0,25
	Suy ra $\angle AHF = \angle AFB \Rightarrow \triangle HAF$ cân tại A .	0,25
4.b (1,0đ)	b) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH = 2OI$.	
	Ta có $BH \parallel CM$ (cùng vuông AC), $HC \parallel BM$ (cùng vuông AB).	0,25
	$\Rightarrow BHCM$ là hình bình hành.	0,25
	Mà I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của $HM \Rightarrow$ ba điểm H, I, M thẳng hàng.	0,25
	$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle AHM \Rightarrow AH = 2OI$	0,25
4.c (1,0đ)	c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH \cdot DA$ lớn nhất.	
	Theo câu 1 ta có $\angle AHF = \angle AFB \Rightarrow \angle BHD = \angle ACB \Rightarrow \angle DAC = \angle DBH$ (g.g)	0,25
	Suy ra $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DH} \Rightarrow DA \cdot DH = DB \cdot DC$	0,25
	Ta có $DB \cdot DC \leq \frac{BD^2 + CD^2}{2} \Rightarrow DB \cdot DC \leq \frac{BC^2}{2}$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $BD = DC$. Vậy để $DH \cdot DA$ lớn nhất thì A là điểm chính giữa cung lớn BC .	0,25
5.a (0,5đ)	a) Cho $xy + yz + xz = 0$ và $xyz \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$	
	Vì: $xy + yz + xz = 0; xyz \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$	0,25
	Chứng minh được nếu: $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$	
	Áp dụng công thức trên ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$	0,25

	Lại có: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3$. (Đpcm)	
5.b (0,5đ)	b) Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.	
	Đặt $2n+1 = x^2 \Rightarrow x$ lẻ $\Rightarrow 2n = (x-1)(x+1):4$ vì $x-1; x+1$ chẵn $\Rightarrow n$ chẵn Đặt $3n+1 = y^2 \Rightarrow y$ lẻ (do n chẵn) và $3n = (y-1)(y+1):8$ vì $y-1; y+1$ là hai số chẵn liên tiếp mà $(3;8) = 1 \Rightarrow n:8$ (1).	0,25
	Ta có một số chính phương chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Mặt khác $x^2 + y^2 = 5n+2 \Rightarrow x^2, y^2$ chia cho 5 dư 1 Nên $n = (3n+1) - (2n+1) = (y^2 - x^2):5$ (2). Từ (1), (2) và $(5;8) = 1 \Rightarrow n:40$. Đpcm.	0,25

(Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)