

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}} - \frac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm). Chứng minh rằng:

- $10^{2023} + 2024$ chia hết cho 3;
- $n^3 + 2024n + 2$ không chia hết cho $10^{2023} + 2024$ với mọi số tự nhiên n .

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\frac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $4x^2 + 9y^2 = 10$.

Chứng minh rằng $\frac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55} \leq 20$.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $\angle ACB = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- Chứng minh rằng $\angle AMC = \angle AIC = 120^\circ$.
- Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MI và AC . Chứng minh rằng $AB = AN$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB > BC$) có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC . Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC , I là trung điểm của đoạn thẳng DF . Tia AI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$), tia BE cắt đường tròn (O) tại J ($J \neq B$). Chứng minh rằng:

- E là trung điểm của đoạn thẳng HJ ;
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Bản hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

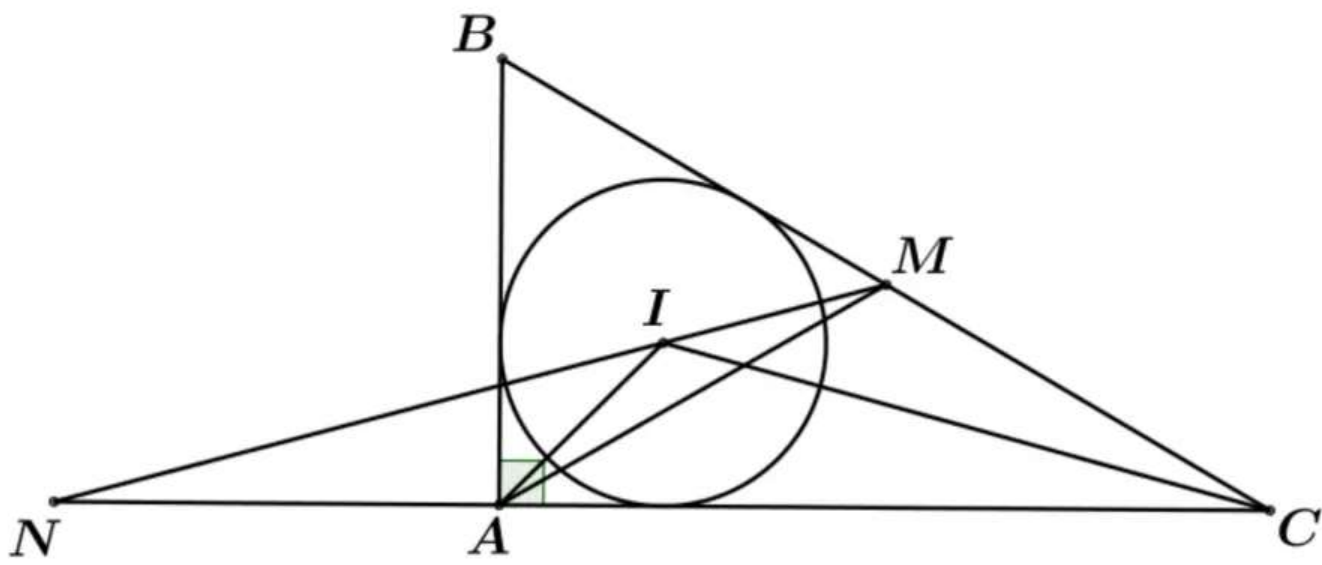
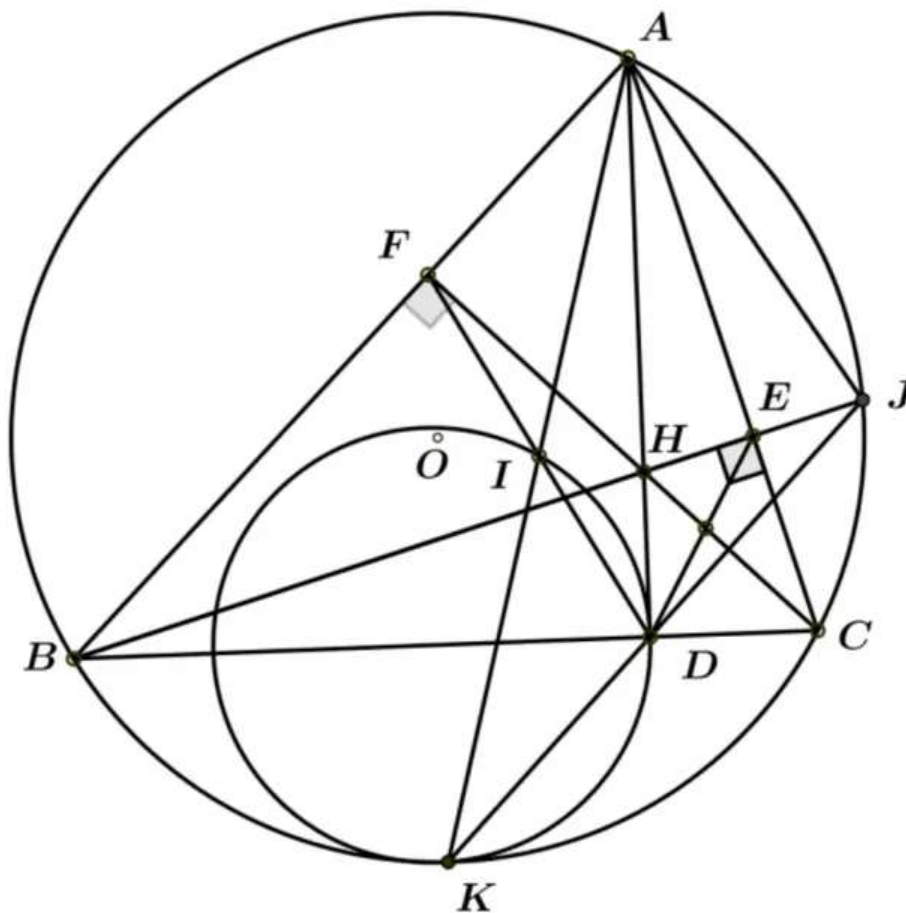
- Giám khảo cần nắm vững yêu cầu của hướng dẫn chấm để đánh giá đúng bài làm của thí sinh. Thí sinh làm cách khác đáp án nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Khi vận dụng đáp án và thang điểm, giám khảo cần chủ động, linh hoạt với tinh thần trân trọng bài làm của học sinh.
- Nếu có việc chi tiết hóa điểm các ý cần phải đảm bảo không sai lệch với tổng điểm và được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu hỏi trong đề thi, chấm điểm lẻ đến 0,25 và không làm tròn.

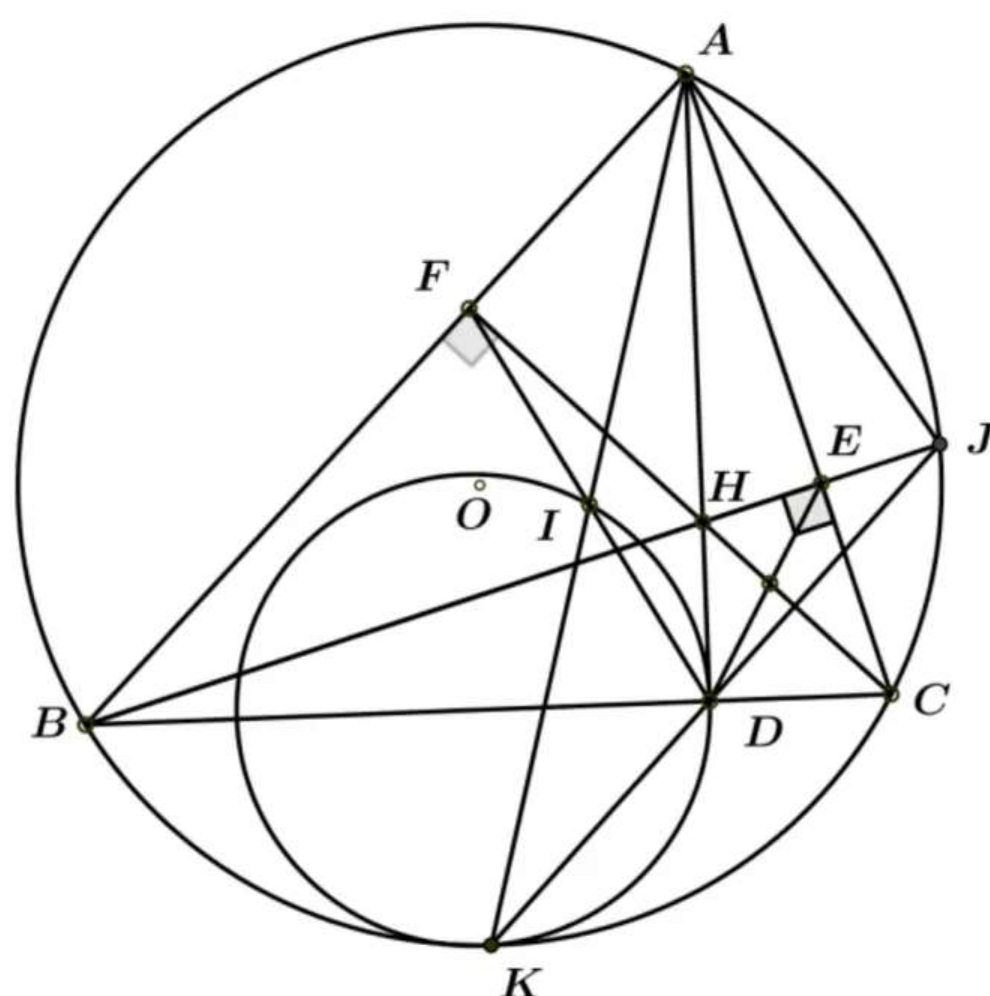
II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	a. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \quad (*) \\ x \neq 4 \end{cases}$	0.25
	Khi đó $A = \left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \right] : \left(\frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$	0.25
	$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) - 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1+x-4-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$	0.25
	$= \frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$	0.25
	b. Với điều kiện (*) ta có $A = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \frac{2(\sqrt{x}-2+4)}{\sqrt{x}-2} = 2 + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$	0.25
	Vì biểu thức A nhận giá trị nguyên nên ta xét các trường hợp: + $\sqrt{x}-2 = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -6$ (vô nghiệm). + $\sqrt{x}-2 = -4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2$ (vô nghiệm). + $\sqrt{x}-2 = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. + $\sqrt{x}-2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại). + $\sqrt{x}-2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$. + $\sqrt{x}-2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$.	0.5

	$+\sqrt{x}-2=4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36.$ $+\sqrt{x}-2=8 \Leftrightarrow \sqrt{x}=10 \Leftrightarrow x=100.$	
	Vậy tập hợp các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên là $T = \{0; 9; 16; 36; 100\}$.	0.25
Câu 2	Điều kiện $x \geq -6$	0.25
	Ta có: $2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$ $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+6} - 3) + (x^2 + 4x - 21) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+6}+3} + (x-3)(x+7) = 0$ $\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + x+7 \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + x+7 = 0 \end{cases}$	0.25
	Với điều kiện $x \geq -6$ thì $\frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + x+7 > 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.	0.25
Câu 3	a. Chứng minh rằng $10^{2023} + 2024$ chia hết cho 3. Vì 10 chia cho 3 dư 1 nên 10^{2023} chia cho 3 dư 1. 2024 chia cho 3 dư 2. Vậy $10^{2023} + 2024$ chia hết cho 3. (1)	0.25
	b. Chứng minh rằng $n^3 + 2024n + 2$ không chia hết cho $10^{2023} + 2024$ với mọi số tự nhiên n . $n^3 + 2024n + 2 = n^3 - n + 2025n + 2$ $= n(n-1)(n+1) + 2025n + 2$ Với mọi số tự nhiên n thì $n-1, n, n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên trong 3 số đó có đúng một số chia hết cho 3. Do đó $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .	0.25
	Vì 2025 chia hết cho 3 nên $2025n$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n . Do đó $n(n-1)(n+1) + 2025n + 2$ chia cho 3 dư 2 với mọi số tự nhiên n . (2)	0.25
	Từ (1), (2) suy ra $n^3 + 2024n + 2$ không chia hết cho $10^{2023} + 2024$ với mọi số tự nhiên n .	0.25
Câu 4	Giả sử, tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\frac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.	0.25

	Khi đó, tồn tại $k, m \in \mathbb{N}$ sao cho: $\begin{cases} n = k^2 \\ \frac{n-10}{3} = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ n-10 = 3m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ n = 10 + 3m^2 \end{cases}.$	
	Do đó $k^2 = 10 + 3m^2 \Leftrightarrow k^2 - 3m^2 = 10$. (1) Suy ra $k^2 \equiv 3m^2 \pmod{5}$. (2) Ta có nhận xét sau: Một số chính phương khi chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 1; hoặc 4. Từ đó, suy ra $3m^2$ chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 3; 2. (3) k^2 chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 1; 4. (4) Từ (2), (3), (4) suy ra $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ 3m^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$.	0.25
	Vì 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ $3m^2 \equiv 0 \pmod{5}$ suy ra $m^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Vì 5 là số nguyên tố nên từ $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ m^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{5} \\ m \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$.	0.25
	Do đó $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod{25} \\ m^2 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$ suy ra $k^2 - 3m^2 \equiv 0 \pmod{25}$. (5) Từ (1), (5) suy ra $10 \equiv 0 \pmod{25}$. Điều này vô lý. Do đó, điều giả sử là sai. Vậy không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\frac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.	0.25
Câu 5	Vì x, y là các số thực dương nên áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $4x^2 + 1 \geq 2\sqrt{4x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 1 \geq 4x.$ $9y^2 + 9 \geq 2\sqrt{81y^2} \Leftrightarrow 9y^2 + 9 \geq 18y.$	0.25
	Do đó $4x^2 + 9y^2 + 10 \geq 4x + 18y \Leftrightarrow 2x + 9y \leq 10$. (1)	0.25
	Ta có: $4(x^2 + y^2) - 4x - 8y + 55 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y-1)^2 + 50$ Vì $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, 4(y-1)^2 \geq 0$ nên $4(x^2 + y^2) - 4x - 8y + 55 \geq 50$. (2)	0.25
	Từ (1), (2) suy ra $\frac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55} \leq \frac{10^3}{50} = 20$. Dấu “=” của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.	0.25

		
Câu 6	a. Chứng minh rằng $AMC = AIC = 120^\circ$. Vì $\triangle ABC$ vuông tại A, có AM là đường trung tuyến nên $MA = MB = MC$.	0.25
	Vì $\triangle MAC$ cân tại M và $MCA = 30^\circ$ (gt) nên $AMC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.	0.25
	Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nên AI, CI lần lượt là đường phân giác trong của BAC, ACB.	0.25
	Suy ra $BAI = IAC = 45^\circ; ACI = ICM = 15^\circ$.	
	Do đó $AIC = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$. Vậy $AMC = AIC = 120^\circ$.	0.25
	b. Chứng minh rằng $AB = AN$. Theo ý a, suy ra tứ giác $AIMC$ nội tiếp đường tròn. Suy ra $IMC = 180^\circ - IAC = 135^\circ$.	0.25
	Do đó $MNC = 180^\circ - (NMC + MCN) = 15^\circ$.	0.25
	Vì $NMA = MNA = 15^\circ$ nên $\triangle ANM$ cân tại A. Suy ra $AN = AM$. (1)	
	Trong $\triangle ABM$ có $MB = MA$ và $ABM = 60^\circ$ (gt). Suy ra $AB = MA = MB$. (2)	0.25
	Từ (1), (2) suy ra $AB = AN$.	0.25
Câu 7		
	a. Ta có: $EAH = CAD = CBE$ (cùng phụ với ACB).	0.5
	Mặt khác $CBE = JBC = JAE = JAC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CJ). Suy ra $EAH = EAJ$.	0.25
	Tam giác AHJ có AE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A nên tam giác AHJ cân tại A. Suy ra AE là đường trung tuyến kẻ từ A. Do đó E là trung điểm của đoạn thẳng HJ.	0.25



b. Ta có các tứ giác $ACDF$, $CDHE$ nội tiếp nên $HDE = HCE = FCA = FDA$ (1).

Đồng thời $HED = HCD = FCD = FAD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DHE$ đồng dạng với $\triangle DFA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HD}{FD} = \frac{HE}{FA}$ (3)

Mặt khác E là trung điểm của HJ (chứng minh trên) và I là trung điểm của FD , kết hợp với (3) ta có $\frac{2HD}{FD} = \frac{2HE}{FA} \Leftrightarrow \frac{HD}{FI} = \frac{HJ}{FA}$.

Xét $\triangle HDJ$ và $\triangle FIA$ có $\begin{cases} \frac{HD}{FI} = \frac{HJ}{FA} \\ \angle AFI = \angle JHD (\text{cùng bù với } \angle ACB) \end{cases}$

Suy ra $\triangle HDJ$ đồng dạng với $\triangle FIA$

$\Rightarrow HJD = FAI$

Mà $FAI = BAK = BJK$ nên $HJD = BJD = BJK \Rightarrow J, D, K$ thẳng hàng.

Từ đó $IKD = AKJ = ABJ = FBH = HDF = HDI$.

Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD .

Mặt khác $AD \perp BC$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC .

ĐIỂM TOÀN BÀI

10,0

---- Hết ---