

Đáp án tham khảo đề Kiên Giang TST môn Toán 2023 - 2024

(chỉ dành cho mục đích tham khảo)

Trần Nguyễn Khánh Bình (Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt)

Dương Thanh Duy (Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt)

Nguyễn Tuấn Kiệt (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm)



30/8/2023 - 31/8/2023

Đề ngày 30/8

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ với $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tìm : $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho dãy số (y_n) xác định bởi:

$$y_n = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k + \left(\frac{1}{x_2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{x_n}\right)^k \text{ với } n \geq 1, \text{ là dãy bị chặn.}$$

Bài 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(yf(x) - 1) = f(x^2y) - f(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3. (5,0 điểm)

a) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng:

$$(2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2 \text{ chia hết cho } p^3$$

b) Cho n là một số nguyên lớn hơn 7. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho $2a \leq n$ và $4a^2 + n$ là một hợp số.

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm là J và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm D . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của ID, JD . Đường tròn có đường kính là AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G khác A . Chứng minh rằng: $\widehat{IDB} = \widehat{AGE}$.

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay..
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Đề ngày 31/8

Bài 5. (7,0 điểm)

Cho 2023 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ thoả mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} = 0.$$

a) Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương $i < j \leq 2023$ sao cho:

$$a_i a_j \leq -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2}{2023}.$$

b) Giả sử rằng $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ là các số thực sao cho bất đẳng thức

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_{2023} - b_{2023})^2$$

đúng với mọi bộ 2023 số thực $(x_1, \dots, x_{2023})$ thoả mãn $x_1 < x_2 < \dots < x_{2023}$. Chứng minh rằng:

$$a_1 + \dots + a_k \leq b_1 + \dots + b_k \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, 2023.$$

Bài 6. (6,0 điểm)

Cho số nguyên dương n và một bảng ô vuông $(2n+1) \times (2n+1)$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho: có thể đặt k viên bi vào k ô của bảng đã cho, mỗi ô không quá 1 viên bi và đồng thời trong mỗi bảng con 2×2 của bảng ô vuông đã cho luôn có không quá 2 viên bi.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm là H . Gọi M là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O song song với AM cắt HM tại K . Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên AC, AB . Gọi N là trung điểm HM . Chứng minh rằng:

a) B, C, O, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) K, E, N, F là các đỉnh của một hình bình hành.

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Đáp án ngày 30/8

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ với $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tìm : $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho dãy số (y_n) xác định bởi:

$$y_n = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k + \left(\frac{1}{x_2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{x_n}\right)^k \text{ với } n \geq 1, \text{ là dãy bị chặn.}$$

Lời giải.

a) *Cách 1: (dùng nguyên lý kẹp)*

Đặt $f(x) = x + \frac{1}{x}$, ta có $x_{n+1} = f(x_n)$. Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1, +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0, \forall x \in (1, +\infty)$.

Suy ra hàm f đồng biến trên $(1, +\infty)$.

Giờ ta sẽ đi chứng minh $\sqrt{2n} < x_n < \sqrt{2n} + 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (I) bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$: ta có $\sqrt{2} < x_1 = 2 < \sqrt{2} + 1$, suy ra mệnh đề (I) đúng với $n = 1$.

Giả sử mệnh đề (I) đúng với $n = k \geq 1$, hay $\sqrt{2k} < x_k < \sqrt{2k} + 1$, ta chứng minh mệnh đề (I) đúng với $n = k + 1$, tức là $\sqrt{2(k+1)} < x_{k+1} < \sqrt{2(k+1)} + 1$.

Thật vậy, ta có $x_{k+1} = f(x_k)$, với $\sqrt{2k} < x_k < \sqrt{2k} + 1$. Dễ thấy $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k} + 1) \subset (1, +\infty)$. Mà hàm số f đồng biến trên $(1, +\infty)$ nên ta biết rằng:

$$f(\sqrt{2k}) < x_{k+1} < f(\sqrt{2k} + 1)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh $f(\sqrt{2k}) > \sqrt{2(k+1)}$ và $f(\sqrt{2k} + 1) < \sqrt{2(k+1)} + 1$ là đủ.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2k}) &> \sqrt{2(k+1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2k} + \frac{1}{\sqrt{2k}} &> \sqrt{2(k+1)} \Leftrightarrow \frac{2k+1}{\sqrt{2k}} > \sqrt{2(k+1)} \\ \Leftrightarrow (2k+1)^2 &> 4k(k+1) \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ (hiển nhiên đúng)} \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}
 & f(\sqrt{2k} + 1) < \sqrt{2(k+1)} + 1 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2k} + \frac{1}{\sqrt{2k} + 1} < \sqrt{2(k+1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2k + \sqrt{2k} + 1}{\sqrt{2k} + 1} < \sqrt{2(k+1)} \\
 \Leftrightarrow & 2k + 1 + \sqrt{2k} < 2\sqrt{k(k+1)} + \sqrt{2(k+1)} \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2 - \sqrt{2}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} - \sqrt{2}) < 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \left(\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} - \sqrt{2} \right) < 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Bất đẳng thức (1) luôn đúng vì $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} > 0$ và

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2} < 0$$

Vậy ta có $f(\sqrt{2k}) > \sqrt{2(k+1)}$ và $f(\sqrt{2k} + 1) < \sqrt{2(k+1)} + 1$, dẫn tới mệnh đề (I) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta được $\sqrt{2n} < x_n < \sqrt{2n} + 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\sqrt{2} < \frac{x_n}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2n} + 1}{\sqrt{n}}$$

Mà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n} + 1}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

Vậy theo nguyên lý kẹp ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

Cách 2: (dùng định lý Stolz-Cezaro)

Dễ thấy rằng (x_n) là dãy tăng ngặt, ta giả sử rằng (x_n) có chặn trên.

Khi đó, theo Weierstrass, thì (x_n) sẽ có giới hạn hữu hạn. Gọi $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$, thì L phải thỏa:

$$L = L + \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy theo nguyên lý phản chứng, (x_n) không bị chặn trên, tức $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Ta lại có: } x_{n+1}^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} \Rightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$$

$$\Rightarrow \lim(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim\left(2 + \frac{1}{x_n^2}\right) = 2 \text{ (do } \lim x_n = +\infty)$$

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{x_n^2}{n}\right) = \lim(x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2 \text{ (theo bổ đề trung bình Cezaro)}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

b) Đầu tiên, ta sẽ chứng minh bổ đề sau (Sự hội tụ của hàm zeta Riemann):

Gọi hàm zeta Riemann của s , với $s > 0$ là hàm được định nghĩa như sau:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Khi đó, $\zeta(s)$ bị chặn trên, tức hội tụ khi và chỉ khi $s > 1$

Chứng minh: Xét $s > 1$, ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \dots \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{2}{2^s}\right) + \left(\frac{4}{4^s}\right) + \left(\frac{8}{8^s}\right) + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \zeta(s) < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)}, \forall s > 1, \text{ tức } \zeta(s) \text{ bị chặn trên, dẫn đến việc hội tụ.}$$

Với $0 < s \leq 1$, thì ta lại có:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \left(\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \zeta(s) = +\infty, \forall s \leq 1$, tức $\zeta(s)$ phân kỳ, không bị chặn trên.

Ta chứng minh xong bổ đề.

Với bổ đề đã chứng minh xong, ta bắt tay vào bài.

Từ câu a, ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ đủ lớn để:

$$1 < \frac{x_n}{\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq N$$

Khi đó, xét $k > 2$, với $n > N$, ta được:

$$y_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \right)^k = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{x_i} \right)^k + \sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{x_j} \right)^k < \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{x_i} \right)^k + \sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k$$

Vì $k > 2 \Leftrightarrow \frac{k}{2} > 1$, nên theo bổ đề, ta có:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{\frac{k}{2}}} \right) = \zeta \left(\frac{k}{2} \right) \text{ bị chặn trên}$$

Mà ta lại biết rằng: $\sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k < \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k$

$\Rightarrow \sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k$ bị chặn trên với mọi $n \Rightarrow (y_n)$ bị chặn trên

Ngược lại, xét $k \leq 2$, khi đó, với $n > N$, ta có:

$$y_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \right)^k = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{x_i} \right)^k + \sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{x_j} \right)^k > \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{x_i} \right)^k + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k \right)$$

Vì $k \leq 2 \Leftrightarrow \frac{k}{2} \leq 1$, nên theo bổ đề, ta có:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{\frac{k}{2}}} \right) = \zeta \left(\frac{k}{2} \right) \text{ không bị chặn trên}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=N}^n \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right)^k \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \Rightarrow (y_n)$ là dãy không bị chặn.

Vậy, (y_n) sẽ bị chặn khi và chỉ khi $k > 2$, tức tất cả giá trị k để (y_n) bị chặn là mọi số tự nhiên $k \geq 3$.

Nhận xét bài 1.

a) Cách 1: Dùng nguyên lý kẹp

Gần như mọi bài toán tính giới hạn của dãy số thông thường, đều có thể xử lý bằng nguyên lý kẹp. Bài này cũng không ngoại lệ. Cách giải trên cho thấy khả năng của việc tận dụng những kiến thức toán cơ bản trong THPT (xét hàm, đạo hàm, quy nạp, ...) để giải những bài toán khó khi không có hướng xác định. Kỹ năng này sẽ rất hữu dụng trong những kỳ thi, vì đôi khi giải đề không cần những bổ đề, định lý cao siêu, mà yêu cầu khai thác triệt để những kiến thức căn bản !

a) Cách 2: Dùng Định lý Stolz-Cezaro

Bài toán thuộc vào lớp bài toán ứng dụng Stolz-Cezaro tương đối kinh điển. Cụ thể là:

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn: $x_{n+1} = x_n \pm x_n^a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Hãy tìm b sao cho dãy số $\left\{ \frac{x_n}{n^b} \right\}$ có giới hạn hữu hạn

b) Từ câu (a), đề bài của câu b dẫn đến bổ đề về hàm zeta Riemann tương đối tự nhiên. Tuy nhiên, việc chưa biết đến bổ đề này sẽ là một trở ngại lớn đối với bất kỳ thí sinh nào muốn chinh phục câu này. Ý tưởng chứng minh bổ đề dựa trên một cách chứng minh bằng đánh giá của việc dãy điều hòa tăng đến vô cực, tức:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

Bài 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(yf(x) - 1) = f(x^2y) - f(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa đề. Xét $f(x)$ là hàm hằng, ta thấy $f(x) \equiv 0$ là một hàm số thỏa mãn. Xét f khác hằng

Thay $x = y = 0$ suy ra $f(0)f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(-1) = 0$.

TH1: $f(-1) = 0$, thay $y = 0$ suy ra

$$\begin{aligned} f(x)f(-1) &= f(0) - f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x) &= f(0), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (loại)} \end{aligned}$$

TH2: $f(0) = 0$.

Giả sử tồn tại k sao cho $f(k) = 0$, thay $x = k$ cho ta

$$f(k^2y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $k \neq 0$ thì $f(x) \equiv 0$ (loại).

Nếu $k = 0$, ta được f đơn ánh tại 0.

Thay y thành $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) suy ra

$$f(x)f\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = 0, \forall x \neq 0.$$

Do $x \neq 0$ suy ra $f(x) \neq 0$ (do f đơn ánh tại 0) dẫn đến

$$f\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = 0, \forall x \neq 0$$

Kết hợp f đơn ánh tại 0 suy ra $\frac{f(x)}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x, \forall x \neq 0$.

Lại có $f(0) = 0$ suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy có hai hàm số thỏa đề là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét bài 2. Đây là một bài toán phương trình hàm trên tập số thực khá cơ bản, chỉ vận dụng các tính chất của ánh xạ để giải quyết.

Bài 3. (5,0 điểm)

a) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng:

$$(2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2 \text{ chia hết cho } p^3$$

b) Cho n là một số nguyên lớn hơn 7. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho $2a \leq n$ và $4a^2 + n$ là một hợp số.

Lời giải.

a) Theo định lý Fermat nhỏ, ta có: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Vì $(2^{p-1}, p^3) = 1$ (do 2 số này khác tính chẵn lẻ) nên thay vì chứng minh:

$$p^3 \mid (2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2$$

Ta sẽ đi chứng minh:

$$p^3 \mid 2^{p-1} \left((2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2 \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & 2^{p-1} \left((2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2 \right) \\ &= (2^{p-1} - 2)^p (2^p - 1) - 2^{(p-1)^2+p-1} + 2^p \end{aligned}$$

Đặt $2^{p-1} - 1 = kp$, ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} (2^{p-1} - 2)^p (2^p - 1) &= (kp - 1)^p (2kp + 1) \\ &= \left(\sum_{i=0}^p C_p^i k^i p^i (-1)^{p-i} \right) (2kp + 1) \\ &\equiv (kp^2 - 1)(2kp + 1) \pmod{p^3} \\ &\equiv kp^2 - 2kp - 1 \pmod{p^3} \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} 2^{p(p-1)} &= (2^{p-1})^p = (kp + 1)^p = \sum_{i=0}^p C_p^i k^i p^i (1)^{p-i} \\ &\equiv kp^2 + 1 \pmod{p^3} \end{aligned}$$

Nên:

$$\begin{aligned}
 & (2^{p-1} - 2)^p (2^p - 1) - 2^{(p-1)^2+p-1} + 2^p \\
 & \equiv kp^2 - 2kp - 1 - 2^{(p-1)^2+p-1} + 2^p \pmod{p^3} \\
 & \equiv kp^2 - 2kp - 1 - 2^{(p-1)^2+p-1} + 2kp + 2 \pmod{p^3} \\
 & \equiv kp^2 + 1 - 2^{p(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^3}
 \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được:

$$p^3 \mid (2^{p-2} - 1)^p (2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2$$

tức điều cần chứng minh.

b)

• Nếu n là hợp số, khi đó ước nguyên tố bé nhất của n không vượt quá $\sqrt{n}$. Dễ dàng chứng minh được $\sqrt{n} < \frac{n-1}{2}$, với n là số nguyên lớn hơn 7. Vì vậy, khi đó ta chọn a bằng ước nguyên tố bé nhất của n là d , thì $4a^2 + n$ chia hết d và $4a^2 + n > d$ dẫn đến $4a^2 + n$ là hợp số.

• Nếu n là số nguyên tố, vì n lớn hơn 7 nên n có thể có dạng $4k + 1$ hoặc $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

▷ Nếu $n = 4k + 1$, ta chọn $a = k$ thì $4a^2 + n = (2k + 1)^2$ là hợp số.

▷ Nếu $n = 4k - 1$, vì $n > 7$ nên $k \geq 2$.

◊ Nếu k có ước nguyên tố lẻ m , chọn $a = \frac{m-1}{2}$, khi đó $4a^2 + n = m^2 - 2m + 4k$ chia hết cho m và lớn hơn m dẫn tới $4a^2 + n$ là hợp số.

◊ Nếu k không có ước nguyên tố lẻ, tức là $k = 2^s$, $s \in \mathbb{N}^*$. Ta có $n = 2^{s+2} - 1$ là số nguyên tố, suy ra $s + 2$ là số nguyên tố, suy ra s là số lẻ. Ta có các TH sau:

+) $s = 4t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$. Ta chọn $a = 2^{2t-1}$, khi đó $4a^2 + n = 2^{4t} + 2^{4t+3} - 1 = 9 \cdot 2^{4t} - 1 = (3 \cdot 2^{2t} - 1)(3 \cdot 2^{2t} + 1)$ là hợp số (vì $3 \cdot 2^{2t} - 1 > 3 \cdot 2^2 - 1 > 1$).

+) $s = 4t + 3$, $t \in \mathbb{N}^*$. Ta chọn $a = 2^{2t}$ suy ra $4a^2 + n = 2^{4t+2} + 2^{4t+5} - 1 = 9 \cdot 2^{4t+2} - 1 = (3 \cdot 2^{2t+1} - 1)(3 \cdot 2^{2t+1} + 1)$ là hợp số vì $3 \cdot 2^{2t+1} - 1 > 1$.

Vậy mọi trường hợp đều đã được chứng minh, bài toán đã được giải quyết trọn vẹn.

Nhận xét bài 3.

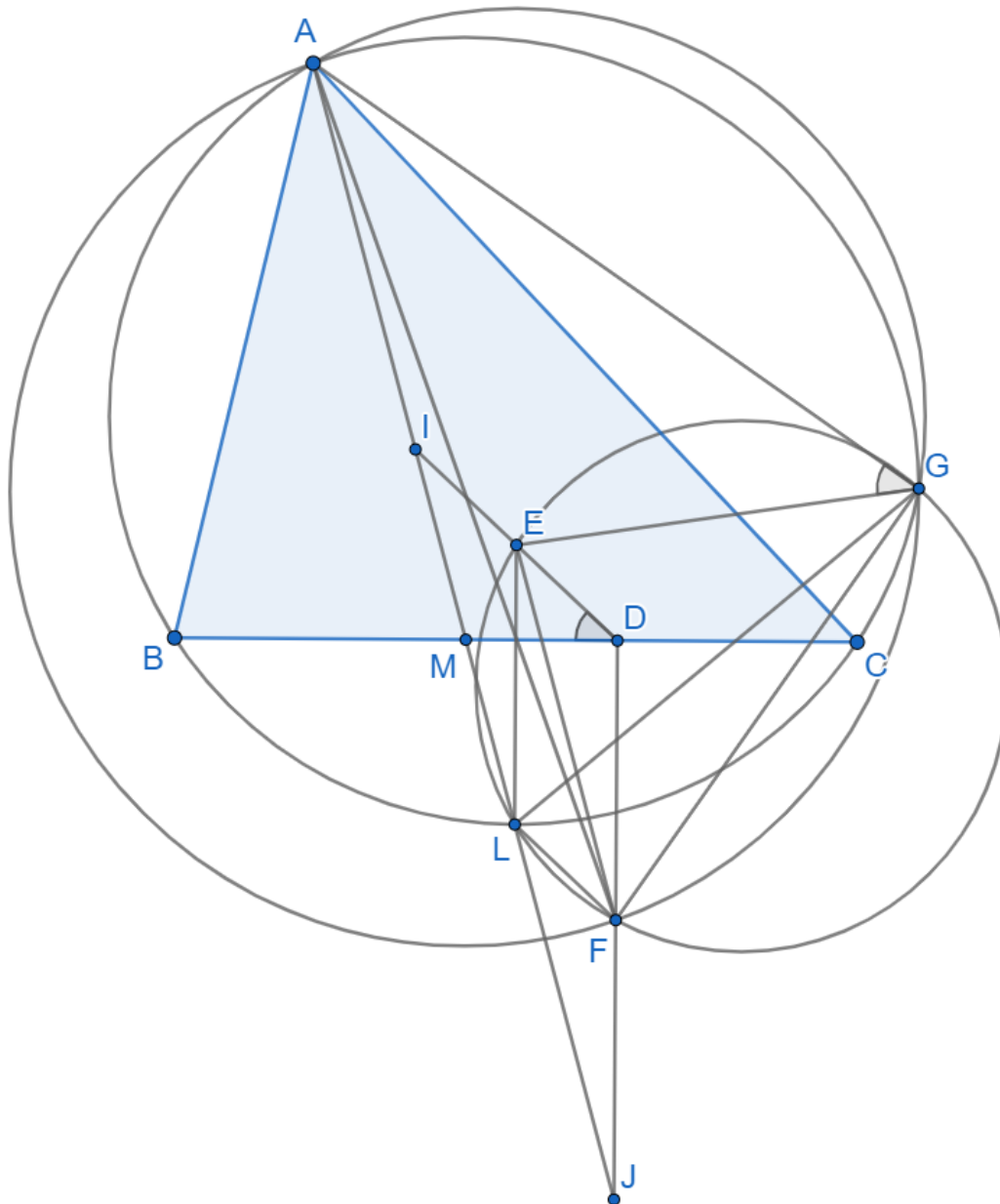
a) Câu a ý tưởng khá rõ ràng, vì p là số nguyên tố lẻ, nên 2 nguyên tố cùng nhau

với p và ta có $2^{p-1} - 1$ chia hết cho p theo Fermat. Giờ ta chỉ việc tìm cách để khai thác thông tin này. Vì vẫn còn phân tử 2^{p-2} , nên ta nhân 2^{p-1} để mọi số mũ của 2 đều lớn hơn hoặc bằng $p - 1$. Đặt $2^{p-1} - 1 = kp$, và biến đổi, và lời giải sẽ dần hiện ra. Theo mình, thì bài toán này không quá nặng về kĩ thuật, mà cần sự "dũng cảm" trong biến đổi đại số.

b) Câu b thì việc tìm a trong trường hợp n là hợp số, và n là số nguyên tố dạng $4k + 1$ tương đối đơn giản. Việc khó là tiếp tục như thế nào. Xét đến ước của k , sẽ là điều hợp lý tiếp theo, vì trong khi nháp, ta đặt a là một hàm theo k , thì hoàn toàn không thể phân tích $4a^2 + n$ thành nhân tử. Các bước tiếp theo sẽ dần trở nên tự nhiên hơn sau khi ta có nhận xét này.

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm là J và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm D . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của ID, JD . Đường tròn có đường kính là AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G khác A . Chứng minh rằng: $\widehat{IDB} = \widehat{AGE}$.



Lời giải.

Gọi L là trung điểm IJ . Dễ thấy tứ giác $IBJC$ nội tiếp đường tròn đường kính (IJ) , nên L là tâm của $(IBCJ)$. Ta có biến đổi góc:

$$\widehat{BLC} = 2\widehat{BJC} = 2(180^\circ - \widehat{BIC}) = 2\left(180^\circ - \left(90 + \frac{\widehat{A}}{2}\right)\right) = 180^\circ - \widehat{A}$$

$\Rightarrow LBAC$ nội tiếp, tức L nằm trên đường tròn (O)

Vậy, xét tam giác IDJ , có E, F, L lần lượt là trung điểm của ID, DJ, JI , dùng đường trung bình, ta dễ dàng có:

$$\Rightarrow FL \parallel DE \text{ và } FL = \frac{ID}{2} = ED \Rightarrow EDFL \text{ là hình bình hành}$$

Giờ ta sẽ chứng minh tứ giác $EGLF$ nội tiếp đường tròn. Thật vậy, ta thấy:

$$\widehat{LGF} = \widehat{AGF} - \widehat{AGL} = 90^\circ - \widehat{ACL} = 90^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{BCL} = 90^\circ - \widehat{C} - \frac{\widehat{A}}{2}$$

Và gọi đường phân giác AM ($M \in BC$), ta có biến đổi góc (chú ý $IJ \parallel EF$):

$$\widehat{LEF} = \widehat{EFD} = \widehat{IJD} = 90^\circ - \widehat{JMD} = 90^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{MCA} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{C}$$

$\Rightarrow \widehat{LGF} = \widehat{LEF} \Rightarrow EGLF$ nội tiếp. Kết hợp với $EDFL$ là hình bình hành, ta có:

$$\Rightarrow \widehat{AGE} = 90^\circ - \widehat{EGF} = \widehat{ELF} - 90^\circ = \widehat{EDF} - 90^\circ = \widehat{IDB}$$

Nhận xét bài 4.

Đọc vào thoát đầu tưởng như bài này có thể là bài đơn giản nhất trong các bài, với mô hình đường tròn nội tiếp - đường tròn bàng tiếp quen thuộc, nhưng đây thực ra lại là bài mà cả ba chúng mình đều chật vật. Đây là một bài toán yêu cầu chứng minh hai góc bằng nhau, với cả hai góc dường như cực kỳ khó để tiếp cận. Nên để giải được bài này thì thông thường ta sẽ tìm một hoặc tốt hơn là một số tứ giác nội tiếp, lợi dụng đường tròn để thực hiện biến đổi góc. Tuy nhiên, từ các điểm có sẵn trong bài toán, lại không có tứ giác nội tiếp nào cả! Phải tinh mắt lắm (và có lẽ là thêm một chút may mắn nữa) thì mới nhận ra rằng với L là điểm giữa cung BC , thì tứ giác $ELFG$ nội tiếp. Với tính chất quen thuộc rằng L sẽ là trung điểm IJ , lợi dụng các đường trung bình của tam giác IDJ , thì bài toán trở lại một bài biến đổi góc thông thường.

Đáp án ngày 31/8

Bài 5. (7,0 điểm)

Cho 2023 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ thoả mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} = 0.$$

a) Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương $i < j \leq 2023$ sao cho:

$$a_i a_j \leq -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2}{2023}.$$

b) Giả sử rằng $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ là các số thực sao cho bất đẳng thức

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_{2023} - b_{2023})^2$$

đúng với mọi bộ 2023 số thực $(x_1, \dots, x_{2023})$ thoả mãn $x_1 < x_2 < \dots < x_{2023}$. Chứng minh rằng:

$$a_1 + \dots + a_k \leq b_1 + \dots + b_k \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, 2023.$$

Lời giải.

a) Chọn $a_i = \min \{a_1, a_2, \dots, a_{2023}\}$ và $a_j = \max \{a_1, a_2, \dots, a_{2023}\}$. Khi đó:

$$\Rightarrow a_i \leq a_k \leq a_j, \forall k \in \overline{1, 2023} \Rightarrow (a_k - a_i)(a_j - a_i) \leq 0, \forall k \in \overline{1, 2023}$$

$$\Rightarrow a_k^2 - (a_i + a_j)a_k + a_i a_j \leq 0, \forall k \in \overline{1, 2023} \Rightarrow a_i a_j \leq (a_i + a_j)a_k - a_k^2, \forall k \in \overline{1, 2023}$$

Cộng hết tất cả các bất đẳng thức trên cho $k \in \overline{1, 2023}$, ta được:

$$2023a_i a_j \leq \left(\sum_{m=1}^{2023} a_m \right) (a_i + a_j) - \sum_{n=1}^{2023} a_n^2$$

Từ đề bài, ta lại có: $\sum_{m=1}^{2023} a_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} = 0$, nên:

$$2023a_i a_j \leq -\sum_{n=1}^{2023} a_n^2 \Rightarrow a_i a_j \leq -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2}{2023}$$

b) Ta có thể biến đổi bất đẳng thức đề bài như sau:

$$\begin{aligned}
 & (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - b_{2023})^2 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{2023} x_n^2 - 2 \sum_{m=1}^{2023} a_m x_m + \sum_{i=1}^{2023} a_i^2 \leq \sum_{n=1}^{2023} x_n^2 - 2 \sum_{m=1}^{2023} b_m x_m + \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{2023} a_i^2 - \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \leq 2 \left(\sum_{m=1}^{2023} a_m x_m - \sum_{m=1}^{2023} b_m x_m \right) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{2023} a_i^2 - \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \leq 2 \sum_{m=1}^{2023} (a_m - b_m) x_m \tag{1}
 \end{aligned}$$

Khi đó, ta chọn (x_n) là một cấp số cộng, cụ thể như sau: $(x_1; x_2; x_3; \dots; x_{2023}) = (x_1; x_1 + d; x_1 + 2d; \dots; x_1 + 2022d)$ với d là một số thực dương. Thế vào (1), ta có:

$$\sum_{i=1}^{2023} a_i^2 - \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \leq 2 \left(\sum_{i=1}^{2023} a_i - \sum_{i=1}^{2023} b_i \right) x_1 + 2d \left(\sum_{j=2}^{2023} (j-1)(a_j - b_j) \right)$$

• Nếu $\sum_{i=1}^{2023} a_i - \sum_{i=1}^{2023} b_i > 0$, thì ta cho $x_1 \rightarrow -\infty \Rightarrow VP \rightarrow -\infty$ trong khi $VT \leq VP$ là một hằng số (vô lý)

• Nếu $\sum_{i=1}^{2023} a_i - \sum_{i=1}^{2023} b_i < 0$, thì ta cho $x_1 \rightarrow +\infty \Rightarrow VP \rightarrow -\infty$ trong khi $VT \leq VP$ là một hằng số (cũng vô lý)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2023} a_i - \sum_{i=1}^{2023} b_i = 0. \text{ Ta đặt } S_k = \sum_{i=1}^k b_i - \sum_{i=1}^k a_i \text{ với } k \in \overline{1, 2023}. \text{ Ta có } S_{2023} = 0.$$

Ta cũng có: $a_1 - b_1 = -S_1$ và $a_k - b_k = S_{k-1} - S_k, \forall k \in \overline{2, 2023}$

Từ những tính chất trên, ta được:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{2023} (a_m - b_m) x_m &= (a_1 - b_1) x_1 + (a_2 - b_2) x_2 + (a_3 - b_3) x_3 + \cdots + (a_{2023} - b_{2023}) x_{2023} \\
 &= -S_1 x_1 + (S_1 - S_2) x_2 + (S_2 - S_3) x_3 + \cdots + (S_{2022} - S_{2023}) x_{2023} \\
 &= (x_2 - x_1) S_1 + (x_3 - x_2) S_2 + \cdots + (x_{2023} - x_{2022}) S_{2022} - S_{2023} x_{2023} \\
 &= (x_2 - x_1) S_1 + (x_3 - x_2) S_2 + \cdots + (x_{2023} - x_{2022}) S_{2022} \text{ (do } S_{2023} = 0)
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2023} a_i^2 - \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{2022} (x_{j+1} - x_j) S_j$$

Mà $(x_1, \dots, x_{2023})$ là một dãy thực tăng ngặt bất kỳ, nên khoảng cách giữa 2 phần

tử liên tục là những số thực dương bất kỳ. Đặt $c_j = x_{j+1} - x_j > 0, \forall j \in \overline{1, 2022}$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2023} a_i^2 - \sum_{i=1}^{2023} b_i^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{2022} (x_{j+1} - x_j) S_j = 2 \sum_{j=1}^{2022} c_j S_j \quad (2)$$

với $c_1, c_2, \dots, c_{2022}$ là những số thực dương bất kỳ.

Từ (2), ta giả sử rằng tồn tại $k \in \overline{1, 2022}$ sao cho $S_k < 0$.

Khi đó, ta cố định $c_j \forall j \neq k, j \in \overline{1, 2022}$ và cho $c_k \rightarrow +\infty$ thì vế phải của (2) tiến dần đến $-\infty$. Dễ thấy điều này mâu thuẫn, vì vế trái của (2) nhỏ hơn hoặc bằng vế phải, và vế trái của (2) là một hằng số.

Vậy giả sử của ta là sai, tức $S_k \geq 0, \forall k \in \overline{1, 2022}$. $S_{2023} = 0$, nên điều này cũng đúng với $k = 2023$. Ta suy ra:

$$S_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k - a_1 - a_2 - \dots - a_k \geq 0, \forall k \in \overline{1, 2023}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq b_1 + b_2 + \dots + b_k, \forall k \in \overline{1, 2023}$$

Nhận xét bài 5.

a) Ở bất đẳng thức câu a, vế phải có tính đối xứng về các biến $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$. Vì thế, để chọn i, j thỏa bất đẳng thức, ta chỉ việc chọn i, j sao cho tích $a_i a_j$ là nhỏ nhất. Giả thuyết đề bài cho tổng các số bằng 0, nên hiển nhiên sẽ có số âm, số dương (trong những trường hợp không đặc biệt). Khi đó, để tích $a_i a_j = \text{sgn}(a_i) \cdot \text{sgn}(a_j) \cdot |a_i| \cdot |a_j|$ là nhỏ nhất, thì ta nên chọn a_i, a_j phù hợp 2 yếu tố:

- ▷ Dấu của a_i và a_j nên khác nhau, để tích của chúng âm (ưu tiên 1)
- ▷ a_i và a_j nên có giá trị tuyệt đối lớn nhất có thể (ưu tiên 2)

Đó là lý do ta nghĩ đến việc chọn a_i, a_j như ở lời giải trên. Sau đó, việc còn lại chỉ là sử dụng một bất đẳng thức nào đó để khai thác tính nhỏ nhất, lớn nhất của a_i, a_j .

b) Đây là một câu bất đẳng thức khá khó, có kiểu "độc đạo", khó làm được theo cách khác. Đầu tiên bài toán yêu cầu người giải phải sử dụng tốt ký hiệu Σ , để trình bày bài toán ngắn gọn, dễ nhìn. Việc chọn (x_n) là một cấp số cộng, để bất đẳng thức quy về một biến, cũng là một tư tưởng rất khó nhận ra. Sau đó là việc biến đổi $\sum_{m=1}^{2023} (a_m - b_m)x_m \rightarrow \sum_{j=1}^{2022} (x_{j+1} - x_j)S_j$. Bước này là một kỹ thuật biến đổi đại số dường như cơ bản, nhưng rất khó để nhận ra, có tên gọi là Khai triển Abel. Cuối cùng, điểm thú vị nhất trong bài là cách đánh giá S_k chỉ sử dụng việc đẩy các biến đến ∞ nhằm tạo ra mâu thuẫn.

Bài 6. (6,0 điểm)

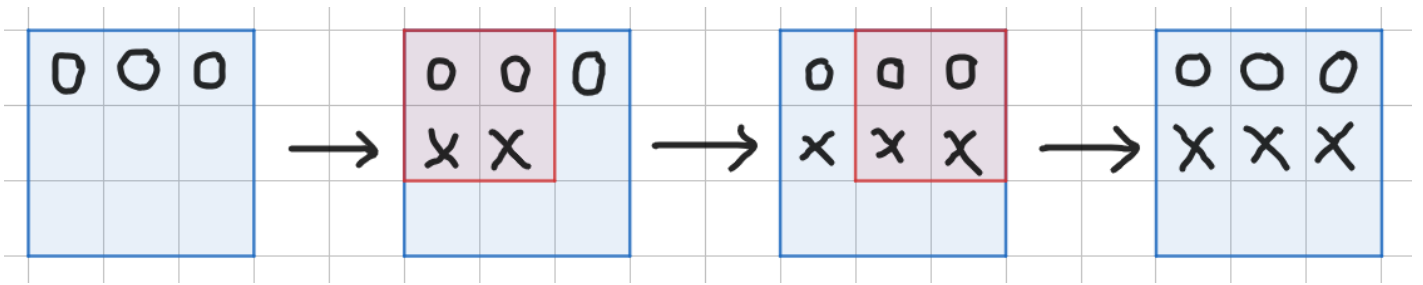
Cho số nguyên dương n và một bảng ô vuông $(2n+1) \times (2n+1)$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho: có thể đặt k viên bi vào k ô của bảng đã cho, mỗi ô không quá 1 viên bi và đồng thời trong mỗi bảng con 2×2 của bảng ô vuông đã cho luôn có không quá 2 viên bi.

Lời giải.

Ta ký hiệu số nguyên dương k lớn nhất thỏa tính chất đề bài cho bảng ô vuông $(2n+1) \times (2n+1)$ là $k_{\max}(n)$

Đầu tiên, ta sẽ tìm $k_{\max}(1)$. Dễ dàng nhận thấy $k_{\max}(1) = 6$. Đó là vì nếu $k = 7$ thỏa, thì ta phải chọn ra 2 ô vuông **không** đặt bi vào trong 9 ô, dẫn đến tồn tại ít nhất một hàng nào đó có đầy đủ 3 viên bi (theo nguyên lý Dirichlet).

Tuy nhiên, nếu một hàng có đầy đủ các viên bi, thì hàng kề cạnh không thể có viên bi nào ! Ta lập luận được điều đó như sau:



Ký hiệu 3 viên bi như hình trên, xét các bảng con 2×2 đỏ như trên hình, ta suy ra được những ô đánh dấu $\times$ là những ô không thể chứa bi. Vậy ít nhất có 3 ô không chứa bi, dẫn đến $k \leq 9 - 3 = 6 \Rightarrow 7 < 6$ (mâu thuẫn).

Vậy ta có $k_{\max}(1) = 6 = (2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)$ (cấu hình là đặt đầy bi ở các hàng lẻ).

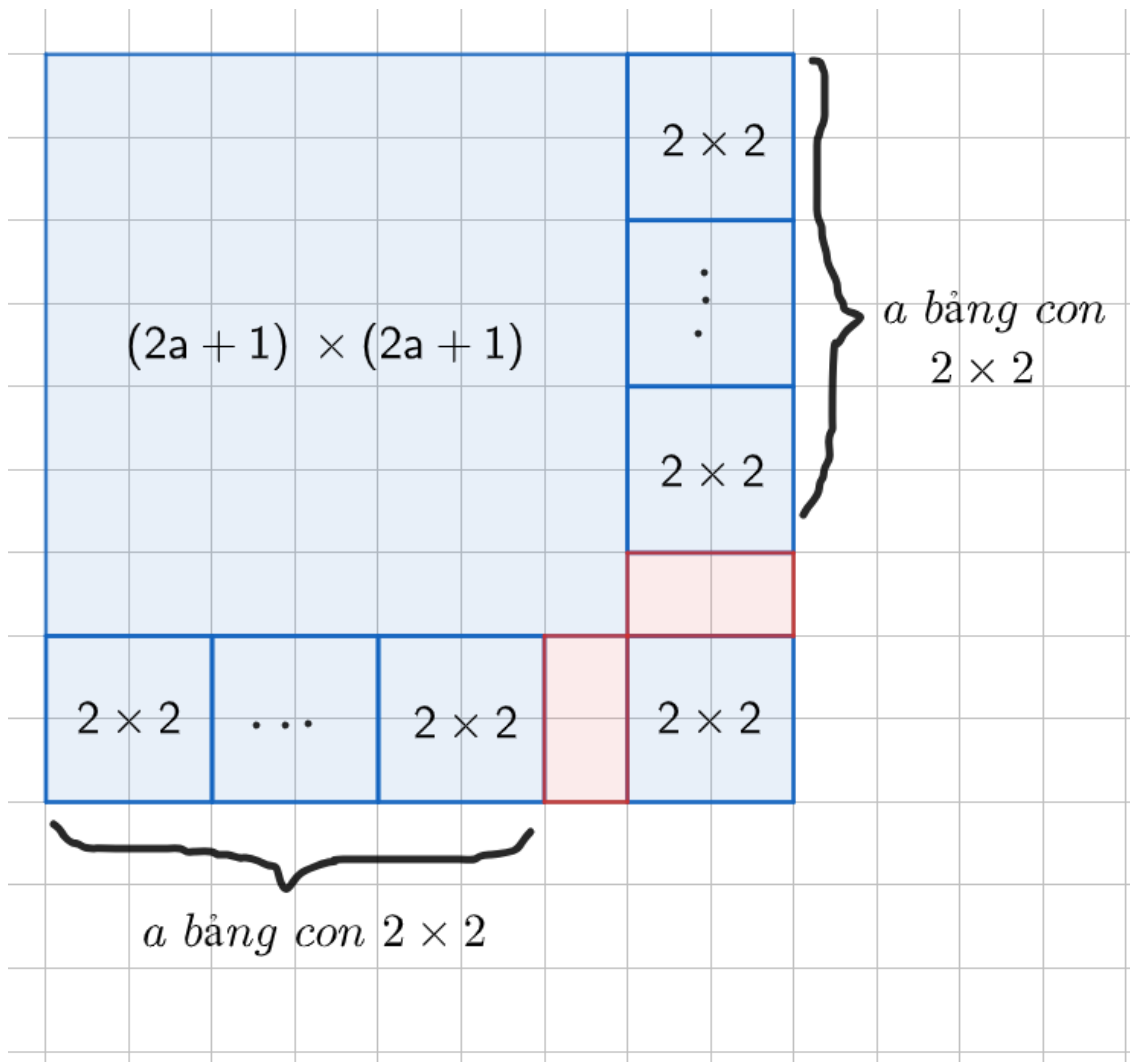
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $k_{\max}(n) = (2n+1)(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Bước cơ sở, với $n = 1$, ta đã vừa chứng minh xong ở trên.

Giờ ta giả sử rằng tồn tại số a nguyên dương để $k_{\max}(a) = (2a+1)(a+1)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $k_{\max}(a+1) = (2a+3)(a+2)$. Ta biết $k_{\max}(a+1) \geq (2a+3)(a+2)$ do cấu hình đặt đầy bi ở các hàng lẻ thỏa mãn tính chất đề bài.

Ta giả sử (để phản chứng) rằng tồn tại cách xếp bi vào k ô, $k(a+1) = (2a+3)(a+2) + 1$ thỏa tính chất đề bài. Khi đó, ta chia bảng ô vuông $(2a+3) \times (2a+3)$ thành các vùng như sau:



Khi đó ta thấy:

- Đặt được tối đa $(2a+1)(a+1)$ viên bi vào bảng $(2a+1) \times (2a+1)$ theo giả thuyết quy nạp

- Đặt được tối đa 2 viên bi vào mỗi bảng con 2×2 , nên đặt được tổng cộng nhiều nhất $2(2a+1) = 4a+2$ viên bi trong $2a+1$ bảng con

$\Rightarrow$ Còn lại $(2a+3)(a+2) + 1 - ((2a+1)(a+1) + 4a+2) = 4$ viên bi, ta phải đặt vào tất cả các ô màu đỏ

Tuy nhiên, nếu đặt hết 4 viên bi vào 4 ô màu đỏ, thì xét bảng con 2×2 góc phải dưới cùng, ta thấy chỉ có thể đặt được một viên bi !

Vậy $k = (2a+3)(a+2) + 1$ sẽ dẫn đến mâu thuẫn ở bảng con 2×2 góc phải dưới cùng $\Rightarrow k \leq (2a+3)(a+2)$ (theo nguyên lý phản chứng)

$\Rightarrow k_{\max}(a+1) = (2a+3)(a+2)$. Nên theo nguyên lý quy nạp, ta có:

$$k_{\max}(n) = (2n+1)(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét bài 6.

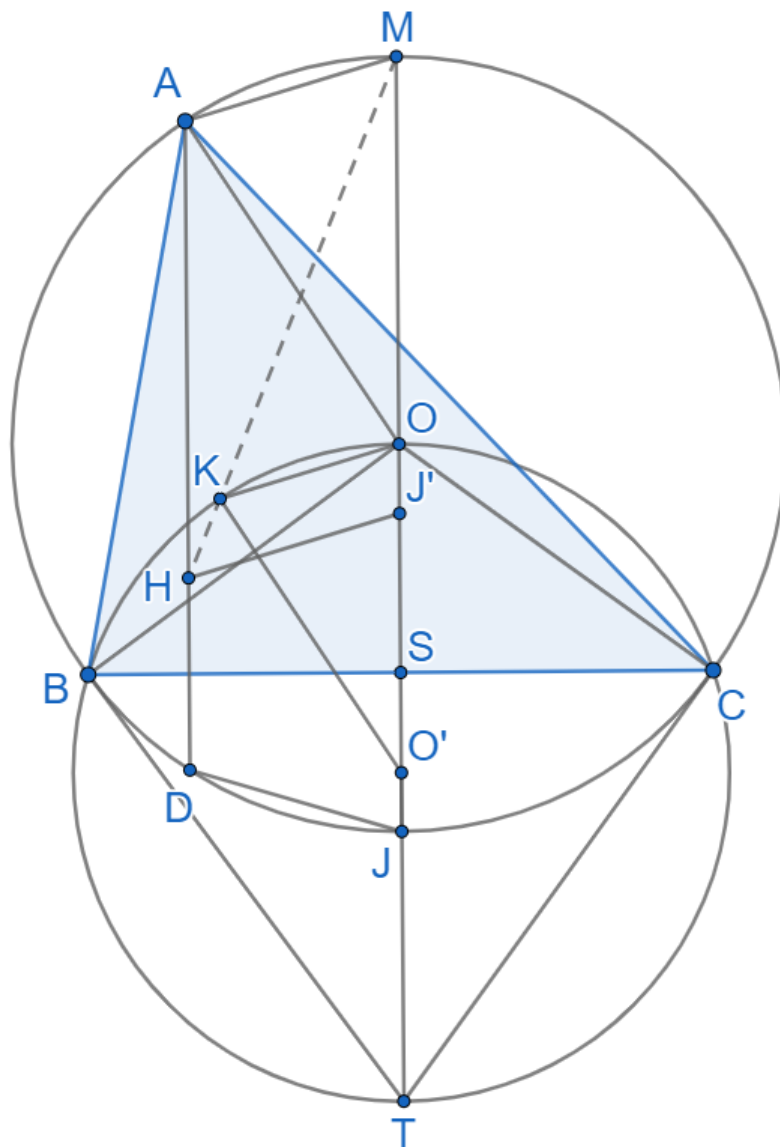
Bài toán trên là một bài toán cực trị tổ hợp trên bảng ô vuông khá quen thuộc, một số bạn có nghiên cứu tổ hợp chắc có thể đã từng gặp qua bài tương tự bài này. Trường hợp trên bảng ô vuông có cạnh chẵn sẽ khá hiển nhiên, nên chỗ khó của đề sẽ là trong bảng ô vuông có cạnh lẻ. Cấu hình tối ưu cho đáp án bài toán tương đối dễ nhận ra, đó là xếp bi vào tất cả những ô thuộc hàng lẻ (hoặc tất cả các ô thuộc cột lẻ). Tuy nhiên việc chứng minh thì không quá dễ dàng. Để chứng minh con số này là tối ưu, ta nghĩ đến hai hướng: Phản chứng và Quy nạp. Với phản chứng, không có quy nạp, thì ta khó mà đánh giá được chỉ bằng việc chia bảng ra thành những bảng con 2×2 rời nhau, do cạnh là số lẻ. Với quy nạp, không có phản chứng, ta gần như không có cách nào để hoàn thành quy nạp. Vì thế việc sử dụng cả hai phương pháp là tối ưu nhất trong bài toán tối ưu này.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm là H . Gọi M là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O song song với AM cắt HM tại K . Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên AC, AB . Gọi N là trung điểm HM . Chứng minh rằng:

- B, C, O, K cùng nằm trên một đường tròn.
- K, E, N, F là các đỉnh của một hình bình hành.

Lời giải.



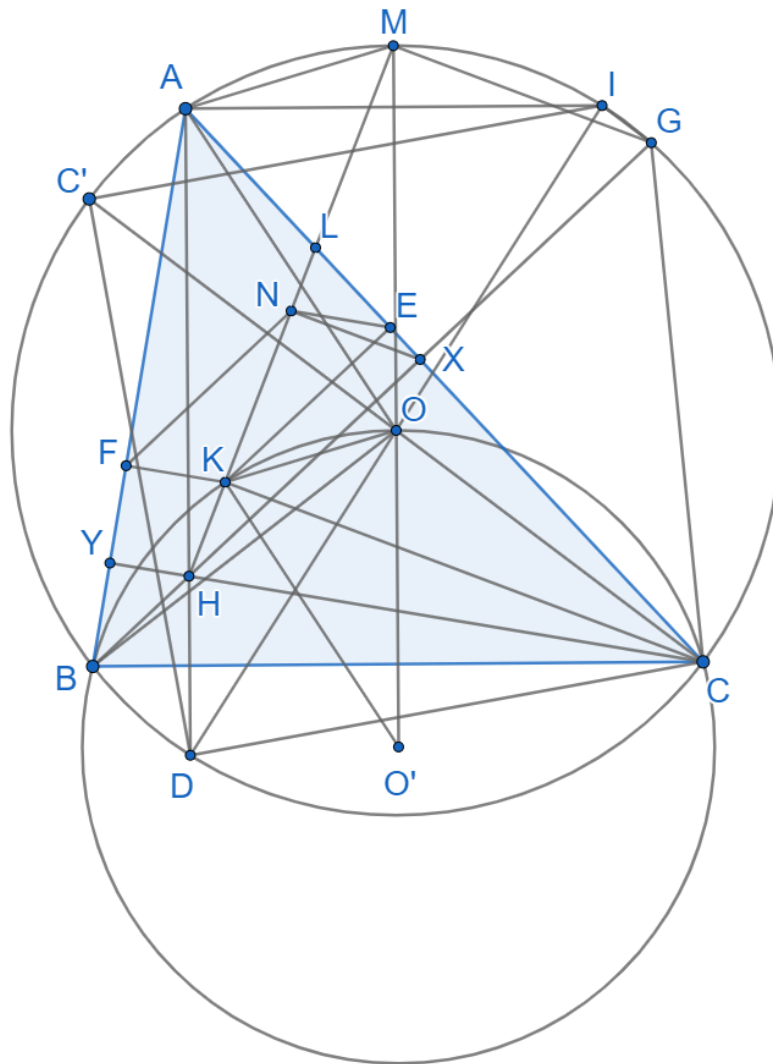
- Định nghĩa lại K là điểm nằm trên (OBC) sao cho $OK \parallel AM$. Khi đó, ta sẽ cần đi chứng minh: H, K, M thẳng hàng

Gọi AH cắt lại (O) tại D , MJ là đường kính của (O) , T là giao điểm 2 tiếp tuyến

Dễ thấy $AMJD, HJ'JD$ đều là hình thang cân nên $AMJ'H$ là hình bình hành
 $\Rightarrow KO \parallel AM \parallel HJ'$

Vì $\triangle OO'K$ và $\triangle MOA$ đều cân và ta có $\widehat{O'OK} = \widehat{OMA} \Rightarrow \triangle OO'K \sim \triangle MOA$

(Ta có $2OS = AH$ là một bổ đề rất quen thuộc trong hình học, có thể dễ dàng được chứng minh, xin không đề cập tại đây)



Trang 21

Ta có: $C'I = CD$ (qua phép đối xứng tâm O)
 $= CH$ (qua phép đối xứng trục BC)
 $= CG$ (qua phép đối xứng trục AC)
 $\Rightarrow C'IGC$ là hình thang cân $\Rightarrow C'C \parallel IG$

Lại có:

$$\widehat{OCK} = \frac{\widehat{OO'K}}{2} = \frac{\widehat{MOA}}{2} = \widehat{MGA} = \widehat{IGM} \Rightarrow KC \parallel MG$$

Dễ thấy NX là đường trung bình của $\triangle HMG \Rightarrow NX \parallel MG \parallel KC$

Vậy, sử dụng định lý Thales, ta có: $\frac{LK}{LC} = \frac{LN}{LX}$ (do $NX \parallel KC$)

Tương tự, sử dụng Thales, ta được: $\frac{LK}{LH} = \frac{LE}{LX}$ (do $KE \parallel HX$)

$\Rightarrow \frac{LC}{LH} = \frac{LE}{LN} \Rightarrow NE \parallel CH$ theo định lý Thales

Tuy nhiên, ta dễ dàng thấy rằng $CY \parallel KF \Rightarrow NE \parallel KF$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $NF \parallel KE \Rightarrow NEFK$ là hình bình hành

Nhận xét bài 7.

a) Giả thuyết khó tận dụng nhất trong câu a là việc K nằm trên MH . Vì thế, dùng phương pháp điểm ảo (Phantom Point), định nghĩa lại điểm K , rồi đi chứng minh K, M, H thẳng hàng. Chứng minh điều này, ta phải đem một trong số những giả thuyết còn lại liên kết với MH , dẫn đến việc lấy đối xứng AM vài lần để tạo ra $HJ' \parallel AM$. Từ đây, xét tam giác đồng dạng, biến đổi độ dài, rồi áp dụng Thales ta được điều cần chứng minh.

(Trong phần biến đổi độ dài, ta có nhân 2 OO' để biến nó thành OT rồi dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông. Mình thấy cách biến đổi này có đôi chút tương tự lời giải trong bài hình Đồng Tháp TST 2023 - 2024 câu b)

b) Để chứng minh câu b, việc muốn đi chứng minh $NE \parallel CH$ là tương đối tự nhiên. Khi đó, dùng định lý Thales, ta thấy điều này tương đương với việc $KC \parallel NX$. Khai thác việc N là trung điểm HM , ta dựng thêm điểm X , để $NX \parallel MG$. Vậy ta cần chứng minh rằng $KC \parallel MG$. Nhưng điểm K là một điểm rất khó tiếp cận, nên ta cố quy về một quan hệ song song khác từ tứ giác nội tiếp đã có ở câu a. Đó là một số định hướng cơ bản cho câu b