

Bài 1. (1,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1} \right)$, với $a \geq 0, a \neq 1$.
2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 4$ và $(d_2): y = (m^2 - 2)x + m + 2$. Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Cho số nguyên a , biết a chia cho 3 dư 2 và a chia cho 7 dư 3. Tìm số dư khi a chia cho 21.
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy = -4x + 2y + 1$.

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình $(x-1)^2 - x\sqrt{x-1} + 1 = 0$.
2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn giá trị của biểu thức $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ là số nguyên.
3. Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện $2024a + 1011b \leq 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{20}{a} + \frac{23}{b} - 1944a - 988b$.

Bài 4. (3,5 điểm)

1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai tia AB và DC cắt nhau tại E sao cho $AED = 40^\circ$, hai tia BC và AD cắt nhau tại F sao cho $AFB = 30^\circ$. Tính số đo các góc trong của tứ giác $ABCD$.
2. Cho đường tròn (O) và BC là dây cung cố định khác đường kính của (O) , A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại D (khác A).
 - a) Chứng minh tam giác DBI cân. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .
 - b) Gọi E, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt các tia EP, EQ lần lượt tại M, N . Gọi F là điểm đối xứng với E qua I . Chứng minh $AM = AN$ và F là trực tâm tam giác EMN .
 - c) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K . Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của K trên các đường thẳng AB và AC . Chứng minh rằng đường thẳng XY luôn qua điểm cố định khi A thay đổi.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho số nguyên $n \geq 6$. Xét một đa giác lồi n cạnh $A_1A_2 \cdots A_n$. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác sao cho các đường chéo này chia đa giác thành đúng k lục giác lồi không có điểm trong chung.

- a) Với $n = 2022$ và $k = 505$, hãy chỉ ra một cách chia đa giác đó.
- b) Với $n = 2023$ và $k = 505$, ta có thể chia đa giác được không? Hãy giải thích.

HẾT

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN (Hệ chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (1,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1} \right)$, với $a \geq 0, a \neq 1$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 4$ và $(d_2): y = (m^2 - 2)x + m + 2$. Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
1.1	Ta có: $A = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}+1)} \right)$	0.25
	$= \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}+1)}$	0.25
	$= \frac{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(a+1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{a-1}{a+1}$ * Vậy $A = \frac{a-1}{a+1}$, với $a \geq 0, a \neq 1$.	0.25
1.2	+) Điều kiện (d_1) và (d_2) cắt nhau: $m \neq -2, m \neq 2$.	0.25
	+) (d_1) cắt Ox tại $A(-2;0)$.	0.25
	+) (d_2) qua $A(-2;0) \Leftrightarrow 0 = -2(m^2 - 2) + m + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (L) \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy $m = -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.	0.25

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Cho số nguyên a , biết a chia cho 3 dư 2, a chia cho 7 dư 3. Tìm số dư khi a chia cho 21.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy = -4x + 2y + 1$.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
2.1	Vì a chia cho 7 dư 3 nên $a = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$. Đặt $k = 3t + r (t, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r \leq 2)$	0.25
	Khi đó $a = 7(3t + r) + 3 = 21t + 7r + 3 (t, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r \leq 2)$ Vì a chia cho 3 dư 2 nên $r = 2$.	0.25
	Lúc đó $a = 21t + 14 + 3 = 21t + 17$. Vậy a chia cho 21 dư 17.	0.25
2.2	* Ta có $x^2 - xy = -4x + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = (x + 2)y$.	0.25
	* $x = -2$ không thỏa, suy ra $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2} = x + 2 - \frac{5}{x + 2}$ Suy ra được $x + 2$ là ước của 5.	0.25
	+) Tìm được các nghiệm $(-7; -4), (-3; 4), (-1; -4), (3; 4)$.	0.25

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình $(x-1)^2 - x\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

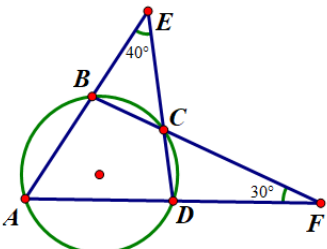
2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn giá trị của biểu thức $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ là số nguyên.

3. Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện $2024a + 1011b \leq 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{20}{a} + \frac{23}{b} - 1944a - 988b$.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
1	Điều kiện $x \geq 1$. +) Pt tương đương $x^2 - x\sqrt{x-1} - 2(x-1) = 0$.	0.25
	* Dễ thấy $x = 1$ không là nghiệm phương trình. nên pt tương đương $\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - 2 = 0$.	0.25
	* Giải được $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow x = 2$	0.25
2	* $\Delta' = -2m + 2$. phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 1$.	0.25
	* $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 4m - 1}{2(m+1)}$	0.25
	* Ta có $2 \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = m + 3 - \frac{4}{m+1}$ là số nguyên nếu $(m+1) \mid 4$.	0.25
	* Tìm được $m = -3$.	0.25
3.	Ta có: $P = \frac{20}{a} + \frac{23}{b} - 1944a - 988b$ $= 20\left(\frac{1}{a} + 4a\right) + 23\left(\frac{1}{b} + b\right) - 1944a - 988b - 80a - 23b$ $= 20\left(\frac{1}{a} + 4a\right) + 23\left(\frac{1}{b} + b\right) - 2024a - 1011b$	0.25
	$\geq 20 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 4a} + 23 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot b} - (2024a + 1011b)$ $\geq 20 \cdot 2 \cdot 2 + 23 \cdot 2 - 2023 = -1897$	0.25
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2024a + 1011b = 2023 \\ \frac{1}{a} = 4a \\ \frac{1}{b} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$ Vậy $\min P = -1897$, đạt được khi $a = \frac{1}{2}, b = 1$.	0.25

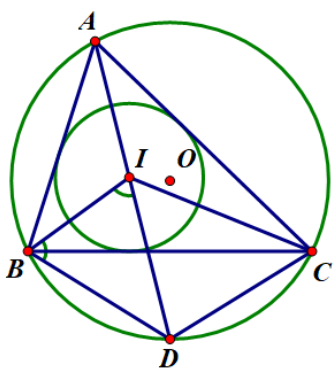
Bài 4. (3,5 điểm)

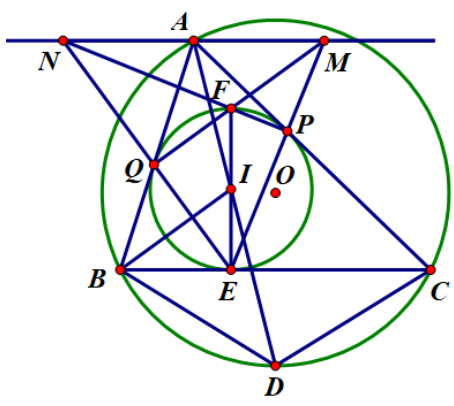
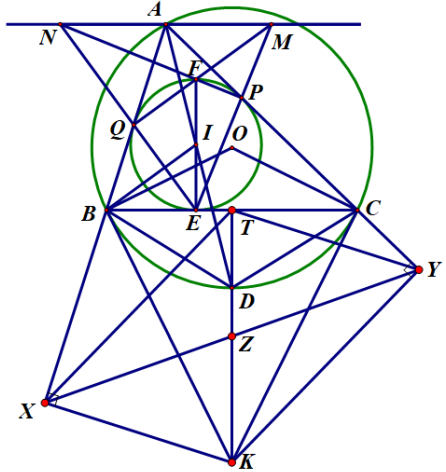
1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết hai tia AB và DC cắt nhau tại E sao cho $AED = 40^\circ$, hai tia BC và AD cắt nhau tại F sao cho $AFB = 30^\circ$. Tính số đo các góc trong của tứ giác $ABCD$.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
4.1		0.25
	Ta có $\begin{cases} A + B + 30^\circ = 180^\circ \\ A + D + 40^\circ = 180^\circ \\ B + D = 180^\circ \end{cases}$	0.25
	$\Rightarrow A = 55^\circ$	0.25
	$\Rightarrow B = 95^\circ, C = 125^\circ, D = 85^\circ$	0.25

2. Cho đường tròn (O) và BC là dây cung cố định khác đường kính của (O) , A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại D (khác A).

- Chứng minh tam giác DBI cân. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .
- Gọi E, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt các tia EP, EQ lần lượt tại M, N . Gọi F là điểm đối xứng với E qua I . Chứng minh $AM = AN$ và F là trực tâm tam giác EMN .
- Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K . Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của K trên các đường thẳng AB và AC . Chứng minh rằng đường thẳng XY luôn qua điểm cố định khi A thay đổi.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
4.2		0.25
	Ta có $BID = IAB + IBA$ (tính chất góc ngoài của tam giác) $= IAC + IBC$ (tính chất phân giác)	0.25
	$= DBC + IBC = IBD$ Vậy tam giác DBI cân tại D .	0.25
	Vì AD là tia phân giác trong góc A nên D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC hay $DB = DC$. Vậy $DB = DI = DC$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .	0.25

4.2 b	Ta có $\angle ANQ = \angle QEB$ (so le trong) $\angle QEB = \angle EQB$ (tính chất tiếp tuyến) $\angle EQB = \angle NQA$ (đối đỉnh) Vì thế $\angle ANQ = \angle NQA$, nên tam giác ANQ cân tại A hay $AN = AQ$.		0.25
	Chúng minh tương tự ta có $AM = AP$. Mà $AQ = AP$ (tính chất tiếp tuyến). Do đó $AM = AN$ (đpcm).		0.25
	* Tam giác QMN có $AM = AN = AQ$ nên vuông tại Q. Suy ra $MQ \perp NE$ Mà $\angle FQE = 90^\circ \Rightarrow FQ \perp NE$. Từ đó ta có M, F, Q thẳng hàng. (1)		0.25
	Lại có $\begin{cases} EF \perp BC \\ BC \parallel MN \end{cases}$ nên $EF \perp MN$ (2) Từ (1) và (2) suy ra F là trực tâm tam giác EMN.		0.25
4.2 c	Gọi T là trung điểm của BC. Rõ ràng các tứ giác $BXKT$, $CYKT$ nội tiếp. Khi đó $\angle XBK = \angle XTK$ và $\angle ACB = \angle TKY$.		0.25
	Ta có $\angle XBK = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBK = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$ Từ đó suy ra $\angle XTK = \angle TKY$ suy ra $XT \parallel KY$. Chúng minh tương tự $TY \parallel XK$. Vậy $XTYK$ là hình bình hành nên XY qua trung điểm Z của đoạn TK. Mà TK cố định Z cố định.		0.25

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho số nguyên $n \geq 6$. Xét một đa giác lồi n cạnh $A_1A_2 \cdots A_n$. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác sao cho các đường chéo này chia đa giác thành đúng k lục giác lồi không có điểm trong chung.

- Với $n = 2022$ và $k = 505$ hãy chỉ ra một cách chia đa giác đó.
- Với $n = 2023$ và $k = 505$, ta có thể chia đa giác được không? Hãy giải thích.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
a	Ta chia được như sau: Kẻ các đường chéo $A_1A_6, A_1A_{10}, \dots, A_1A_{2018}$.	0.25
	Khi đó đa giác này được chia thành $k = (2022 - 6) : 4 + 1 = 505$ miền lục giác.	0.25
b	Giả sử ta có thể chia đa giác lồi 2023 cạnh thành 505 lục giác lồi không có điểm	

	trong chung bởi các đường chéo của nó. Gọi m là số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác. Do mỗi đỉnh của lục giác lồi là đỉnh của đa giác đã cho hoặc là một trong m giao điểm của các đường chéo đã nêu nên tổng số đo tất cả các góc ở đỉnh của các lục giác này là $m \cdot 360^\circ + (2023 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ(2m + 2021)$.	0.25
	Tổng số đo các góc ở đỉnh của 505 lục giác là $505 \cdot 4 \cdot 180^\circ$. Ta có phương trình $180^\circ(2m + 2021) = 505 \cdot 4 \cdot 180^\circ \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (không thỏa). Vậy ta không thể thực hiện được với $n = 2023$ và $k = 505$.	0.25

Chú ý: Mọi lời giải đúng, khác với hướng dẫn chấm, đều cho điểm tối đa theo từng câu và từng phần tương ứng.