

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2 điểm)

- 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$. Chứng minh :

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$$

- 2) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 4$. Tính giá trị của biểu thức :

$$M = (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{y^2+1} + y)$$

Câu II. (2 điểm)

- 1) Giải phương trình : $x^2 + 3x + 8 = (x+5)\sqrt{x^2 + x + 2}$

- 2) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{3}{y^2} + \frac{x}{y} = 12 \\ 6xy^2 + x^2y = 12y^2 + 6y + x \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 14y - 11 = 0$

- 2) Tìm tất cả các số nguyên dương n để $2^n + n^2 + 25$ là lập phương của một số nguyên tố

Câu IV. (3 điểm) Cho tam giác ABC (có $AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC , tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm N

- 1) Chứng minh rằng các điểm A, E, H, F, N cùng thuộc một đường tròn
- 2) Lấy điểm P trên đoạn thẳng BC sao cho $\angle BHP = \angle CHM$, gọi Q là hình chiếu của A lên HP . Chứng minh rằng OA vuông góc với NQ
- 3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PMQ tiếp xúc với đường tròn (O)

Câu V. (1 điểm) Người ta thực hiện một trò chơi trên bảng kẻ ô vuông kích thước 5×9 (có 45 ô vuông). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt ngẫu nhiên vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu thỏa mãn đồng thời các quy định sau:

- i) Các đồng xu phải được di chuyển lên hoặc xuống, trái hoặc phải sao cho mỗi lần di chuyển chỉ đến được ô kế bên nó (ô chung cạnh)
- ii) Nếu mỗi bước di chuyển của đồng xu đã di chuyển lên trên hoặc đi xuống dưới thì bước tiếp theo nó phải di chuyển sang trái hoặc sang phải; và ngược lại.

Trò chơi chỉ dừng lại khi một ô vuông nào đó trên bàn có nhiều hơn một đồng xu. Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2 điểm)

3) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$. Chứng minh :

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$$

Từ $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -(b + c)$. Khi đó :

$$a^3 = [-(b + c)]^3 \Rightarrow a^3 = -b^3 - c^3 - 3(b + c)bc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3(b + c)bc = 3abc$$

Mặt khác, ta cũng có :

$$a^2 - b^2 - c^2 = [-(b + c)]^2 - b^2 - c^2 = 2bc \Rightarrow \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{a^2}{2bc} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có : } \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} = \frac{b^2}{2ca} \quad (2); \quad \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{c^2}{2ab} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta được :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3}{2} \\ & = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2} \quad (dpcm) \end{aligned}$$

4) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 4$. Tính giá trị của biểu thức :

$$M = (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{y^2+1} + y)$$

$$\text{Từ } x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 4 \Leftrightarrow (x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2})^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2+1) + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + y^2(x^2+1) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1) = 17$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + (x^2+1)(y^2+1) = 17$$

$$\Leftrightarrow [xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}]^2 = 17 \quad (*)$$

$$\text{Vì } \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} > \sqrt{x^2y^2} = |xy| \geq -xy \Rightarrow xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} > 0$$

$$\text{Do đó, từ } (*) \Rightarrow xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = \sqrt{17}. \text{ Khi đó :}$$

$$\begin{aligned} M &= (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{y^2+1} + y) = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + xy + y\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{y^2+1} \\ &= (\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + xy) + (y\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{y^2+1}) = \sqrt{17} + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \sqrt{17} + 4$$

Câu II. (2 điểm)

3) Giải phương trình : $x^2 + 3x + 8 = (x + 5)\sqrt{x^2 + x + 2}$

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = t (t > 0) \Rightarrow x^2 + x + 2 = t^2$. Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 + 2x + 6 = (x+5)t \Leftrightarrow t^2 - (x+5)t + 2(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t-x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x+3 \end{cases}$$

$$th1: t = 2 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$th2: t = x+3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x^2 + x + 2 = (x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{7}{5} (tmdk)$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 1; 2; -\frac{7}{5} \right\}$$

4) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{3}{y^2} + \frac{x}{y} = 12 \\ 6xy^2 + x^2y = 12y^2 + 6y + x \end{cases}$$

ĐKXĐ: $y \neq 0$. Ta có :

$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{3}{y^2} + \frac{x}{y} = 12 \\ 6xy^2 + x^2y = 12y^2 + 6y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y^2 + xy - 3 = 12y^2 \\ xy(6y+x) = 12y^2 + (6y+x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3)(xy-1) = 12y^2 \\ (xy-1)(6y+x) = 12y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3)(xy-1) = 12y^2 \\ (2xy+3)(xy-1) - (xy-1)(6y+x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3)(xy-1) = 12y^2 \\ (xy-1)(2xy+3-6y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3)(xy-1) = 12y^2 \quad (1) \\ (xy-1)(2y-1)(x-3) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Xét phương trình

$$(2): (xy-1)(2y-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \Rightarrow 12y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 (ktm) \\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+3)\left(\frac{1}{2}x-1\right) \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \\ x = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (6y+3)(3y-1) = 12y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $\left(-4; \frac{1}{2}\right); \left(3; \frac{1}{2}\right); (3; -1)$

Câu III. (2 điểm)

3) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 14y - 11 = 0$

Ta có:

$$x^2 - 3y^2 - 2xy + 14y - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 4y^2 + 12y - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x-y)^2 - 2(x-y) + 1] - [(2y)^2 - 12y + 9] = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)^2 - (2y-3)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-3y+2)(x+y-4) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-3y+2; x+y-4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3y+2; x+y-4 \in \{-1; 1; -3; 3\}$. Lập bảng

$x-3y+2$	-1	1	-3	3
$x+y-4$	-3	3	-1	1
x	0	5	1	4
y	1	2	2	1

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ cần tìm là $(0; 1), (5; 2), (1; 2), (4; 1)$

4) Tìm tất cả các số nguyên dương n để $2^n + n^2 + 25$ là lập phương của một số nguyên tố

Gọi p là số nguyên tố sao cho $2^n + n^2 + 25 = p^3$ (*)

Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $2^n + n^2 + 25 > 8$, do đó p là một số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow 2^n + n^2 + 25$ là số lẻ, suy ra n phải là số chẵn

Xét bảng đồng dư của a và a^3 theo mod 9 nên $a^3 \equiv 0; \pm 1 \pmod{9}$

Vì n là số nguyên dương chẵn, nên ta xét n theo mod 6. Có ba trường hợp sau :

+TH1: $n = 6k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có :

$$p^3 = 2^n + n^2 + 25 = 2^{6k+4} + (6k+4)^2 + 25 = 16 \cdot 64^k + 36k^2 + 48k + 1$$

$$\Rightarrow p^3 \equiv 16 + 3k + 5 \pmod{9} \Leftrightarrow p^3 \equiv 3(k+1) \pmod{9} \Leftrightarrow p^3 : 3 \Leftrightarrow p = 3$$

Thay $p = 3$ vào (*) ta được : $2^n + n^2 + 25 = 3^3 \Leftrightarrow 2^n + n^2 = 2(ktm)$

+TH2: $n = 6k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có :

$$p^3 = 2^n + n^2 + 25 = 2^{6k+2} + (6k+2)^2 + 25 = 4 \cdot 64^k + 36k^2 + 24k + 29$$

Suy ra $p^3 \equiv 4 - 3k + 2 \pmod{9} \Rightarrow p^3 \equiv 3(2-k) \pmod{9} \Leftrightarrow p^3 : 3 \Rightarrow p = 3$

Thay $p = 3$ vào (*) ta được : $2^n + n^2 + 25 = 3^3 \Leftrightarrow 2^n + n^2 = 2(ktm)$

+Th3: $n = 6k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có : $p^3 = 2^n + n^2 + 25 = 2^{6k} + (6k)^2 + 25 = 64^k + 36k^2 + 25$

Nếu $k = 1 \Rightarrow p^3 = 2^6 + 36 \cdot 1 + 25 = 125 \Rightarrow p = 5(ktm) \Rightarrow n = 6$

Nếu $k = 2 \Rightarrow p^3 = 2^{6 \cdot 2} + 36 \cdot 2^2 + 25 = 4265 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Nếu $k = 3 \Rightarrow p^3 = 2^{6 \cdot 3} + 36 \cdot 3^2 + 25 = 262493 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}(ktm)$

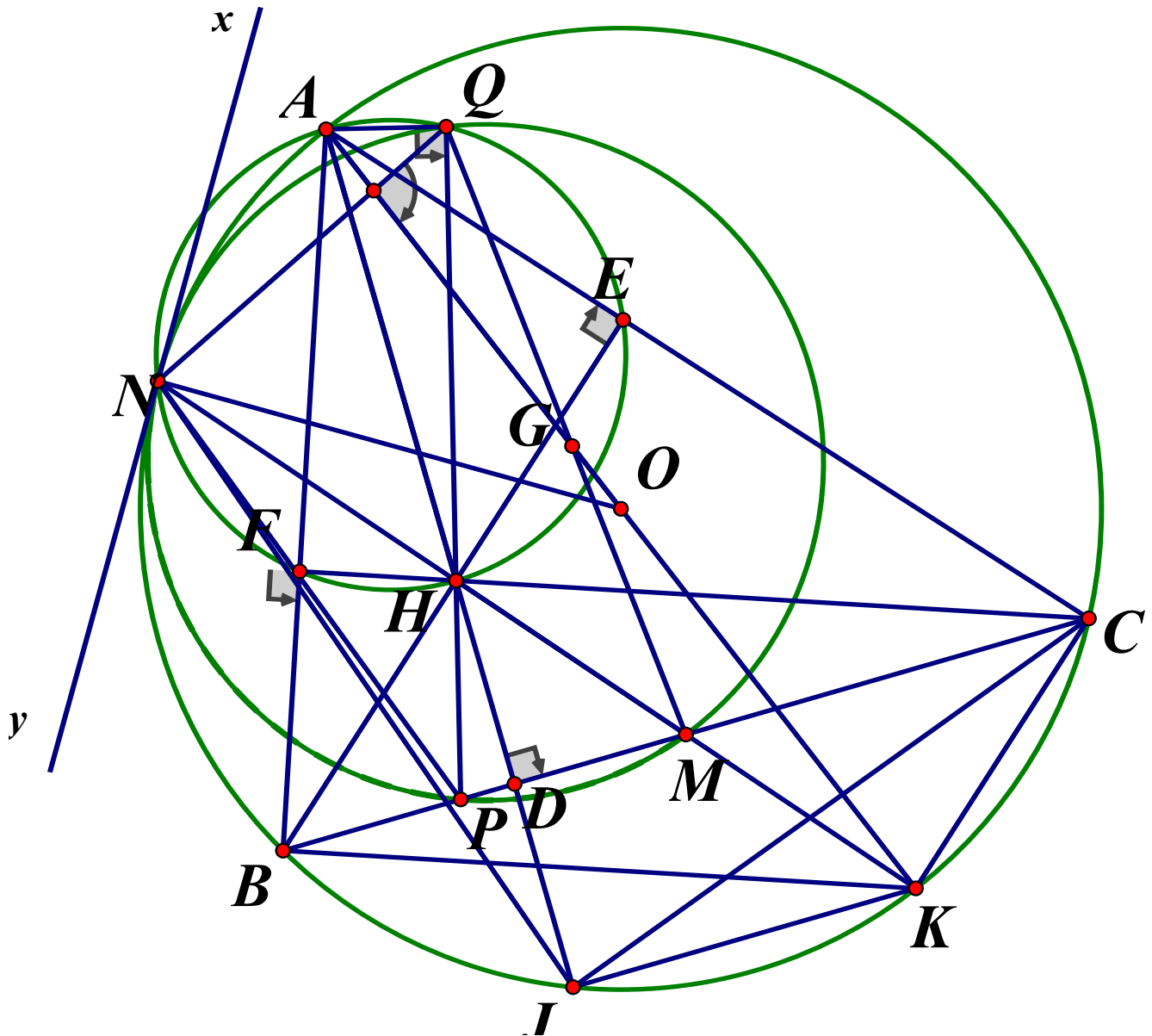
Nếu $k \geq 4$, bằng quy nạp ta chứng minh được $3 \cdot 4^k > 36k^2$ với mọi số nguyên $k \geq 4$

Khi đó, ta có $(2^{2k})^3 < p^3 = 2^{6k} + 36k^2 + 25 < (2^{2k} + 1)^3$

Mà $(2^{2k})^3$ và $(2^{2k} + 1)^3$ là lập phương hai số nguyên liên tiếp. Suy ra không có số nguyên tố nào thỏa mãn yêu cầu

Vậy $n = 6$ thỏa mãn đề bài

Câu IV. (3 điểm) Cho tam giác ABC (có $AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC , tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm N



4) Chứng minh rằng các điểm A, E, H, F, N cùng thuộc một đường tròn

Xét tứ giác $AEHF$ có $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AEH + \angle AFH = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp

Nên bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn có đường kính AH (1)

Gọi K là giao điểm của AO với đường tròn (O) . Ta có:

$CK \parallel BH$ (cùng vuông góc với AC), $BK \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB)

Nên tứ giác $BHCK$ là hình bình hành $\Rightarrow N, H, M, K$ thẳng hàng

$\Rightarrow \angle ANK = 90^\circ$ hay $\angle ANH = 90^\circ$. Vậy N thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (1) và (2) suy ra : các điểm A, E, H, F, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (1) và (2) suy ra : Các điểm A, E, H, F, N cùng thuộc một đường tròn có đường kính AH

5) Lấy điểm P trên đoạn thẳng BC sao cho $\angle BHP = \angle CHM$, gọi Q là hình chiếu của A lên HP . Chứng minh rằng OA vuông góc với NQ

Q là hình chiếu của A trên $HP \Rightarrow \angle AQH = 90^\circ \Rightarrow Q$ cũng thuộc một đường tròn có đường kính AH

Vì $\angle BHP = \angle CHM$ (gt) nên $\angle NHF = \angle QHE$ (lần lượt đối đỉnh với $\angle BHP$ và $\angle CHM$)

$\Rightarrow sd NF = sd QE$ (trong đường tròn đường kính AH)

$\Rightarrow$ tứ giác $QEFN$ là hình thang cân $\Rightarrow NQ \parallel FE$ (3)

Ta lại có :

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một góc không đổi) $\Rightarrow \angle ACB = \angle AFE$ (cùng bù với $\angle BFE$)

Trong đường tròn (O) : $\angle AKB = \angle ACB$ (hai góc nội tiếp một đường tròn cùng chắn 1 cung)
 $\Rightarrow \angle AKB = \angle AFE$ (4)

Mà $\angle AKB + \angle BAK = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau) (5)

Từ (4) và (5) có : $\angle AFE + \angle BAK = 90^\circ$ hay $\angle AFI + \angle FAI = 90^\circ$ (với I là giao điểm của AK và FE) $\Rightarrow AK \perp FE$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $NQ \perp AK$ hay $NQ \perp AO$ (dpcm)

6) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PMQ tiếp xúc với đường tròn (O)

Kẻ đường cao AD của tam giác ABC ($D \in BC$). Gọi J là điểm đối xứng với H qua BC

Ta có : $\angle HCD = \angle JCD$ mà $\angle HCD = \angle BAD$ (cùng phụ với $\angle ABC$)

$\Rightarrow \angle BAD = \angle JCD$ hay $\angle BAJ = \angle JCB \Rightarrow J \in (O) \Rightarrow \angle AKN = \angle NJA$ (7).

Mặt khác : $AO \perp NQ \Rightarrow \angle ANQ = \angle AKN$ (cùng phụ với $\angle QNK$)

Vì $\triangle PHJ$ cân tại P nên $\angle PJH = \angle PHJ$

$\angle PHJ = \angle AHQ$ (hai góc đối đỉnh),

$\angle AHQ = \angle ANQ$ (hai góc nội tiếp một đường tròn cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \angle AKN = \angle PJH$ hay $\angle AKN = \angle PJA$ (8)

Từ (7) và (8) ta suy ra $\angle PJA = \angle NJA \Rightarrow$ ba điểm N, J, P thẳng hàng

Ta lại có : $\angle ANM = \angle ADM = 90^\circ \Rightarrow ANDM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle PMN = \angle DMN = \angle DAN = \angle HQN = \angle PQN$

$\Rightarrow Q$ cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANDM$

Gọi G là giao điểm của AK và MQ , ta có :

$\angle HQG = \angle PQM = \angle PNM = \angle JAK = \angle HAG \Rightarrow G$ thuộc đường tròn đường kính AH

Qua điểm N , vẽ đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Ta có :

$\angle MNx = \angle KNx = \angle KAN = \angle GAN = \angle GQN = \angle MQN$

$\Rightarrow xy$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQM$

Vậy, đường tròn ngoại tiếp tam giác PMQ tiếp xúc với đường tròn (O)

Câu V. (1 điểm) Người ta thực hiện một trò chơi trên bảng kẻ ô vuông kích thước 5×9 (có 45 ô vuông). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt ngẫu nhiên vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu thỏa mãn đồng thời các quy định sau:

- iii) Các đồng xu phải được di chuyển lên hoặc xuống, trái hoặc phải sao cho mỗi lần di chuyển chỉ đến được ô kế bên nó (ô chung cạnh)
- iv) Nếu mỗi bước di chuyển của đồng xu đã di chuyển lên trên hoặc đi xuống dưới thì ở bước tiếp theo nó phải di chuyển sang trái hoặc sang phải; và ngược lại.

Trò chơi chỉ dừng lại khi một ô vuông nào đó trên bàn có nhiều hơn một đồng xu.
Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.

Đánh số 45 ô vuông như hình bên

1	2	1	2	1	2	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

4	3	4	3	4	3	4	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	1	2	1	2	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

4	3	4	3	4	3	4	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	1	2	1	2	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Theo cách đánh này, sẽ có : 15 ô số 1, 12 ô số 2, 8 ô số 3, 10 ô số 4

Đặt ngẫu nhiên 33 đồng xu vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn 1 đồng xu. Ta chia 33 đồng xu thành hai nhóm :

Nhóm I: Các đồng xu ở vị trí ô đánh số 1 và 3

Nhóm II: Các đồng xu ở vị trí ô đánh số 2 và 4

Ta thấy:

- Theo quy tắc i) thì sau mỗi bước các đồng xu ở nhóm I sẽ chuyển thành nhóm II và ngược lại

- Theo quy tắc ii) thì sau hai bước các đồng xu ở ô đánh số 1 sẽ chuyển sang ô đánh số 3

Do đó, sau hữu hạn bước sẽ có trường hợp nhóm I có ít nhất 17 đồng xu (vì nếu nhóm II đang có ít nhất 17 đồng xu thì ở bước sau nhóm I sẽ có ít nhất 17 đồng xu)

Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet, trong 17 đồng xu ở nhóm I sẽ có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh cùng một loại số (1 hoặc 3)

+ Nếu có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh số 3. Tuy nhiên chỉ có 8 ô đánh số 3, nên sẽ có ít nhất 1 ô có nhiều hơn một đồng xu. Trò chơi kết thúc.

+ Nếu có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh số 1 thì sau hai bước 9 đồng xu này nằm ở ô đánh số 3. Tuy nhiên chỉ có 8 ô đánh số 3, nên sẽ có ít nhất 1 ô có nhiều hơn một đồng xu.

Trò chơi kết thúc.

Vậy, trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.