

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2023 – 2024
KHÓA NGÀY 06 THÁNG 6 NĂM 2023

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: Toán

Ngày thi: 07 tháng 06 năm 2023

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (1,0 điểm) Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

Bài 3. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi J là giao điểm của AI và DE ; K là trung điểm của AB .

- Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.
- Gọi M là giao điểm của KI và AC , N là giao điểm của AH và ED . Chứng minh $AM = AN$
- Gọi Q là giao điểm của DI và EF , P là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Bài 4. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$

a) Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{2}{3}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} + \frac{2z+3}{4z+2}$.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O) .

- Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.
- Chứng minh EH song song FG .

Bài 6. (1,0 điểm) Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 = c^3 = 3abc$ là số nguyên tố.

- Chứng minh $a < 0$.
- Tìm tất cả các số nguyên a, b, c ($a < b < c$) sao cho n là một ước của 2023.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (1,0 điểm) Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Vì $b^2 = (a^2 + b^2) - a^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - a)(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$ nên từ giả thiết, ta có:

$$a^2 + b^2 = 4(\sqrt{a^2 + b^2} - a) + a\sqrt{a^2 + b^2}, \text{ hay } a^2 + b^2 - 4\sqrt{a^2 + b^2} = a(\sqrt{a^2 + b^2} - 4)$$

Một cách tương đương, ta có:

$$(\sqrt{a^2 + b^2} - 4)(\sqrt{a^2 + b^2} - a) = 0$$

Vì $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} \geq a$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$, tức $P = 16$.

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 2$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$x^2 - x - 5 = 2(x-1)(\sqrt{x-2}),$$

Hay

$$(x-1)^2 + (x-2) - 2(x-1)\sqrt{x-2} = 4.$$

Một cách tương đương, ta có

$$(x-1-\sqrt{x-2})^2 = 4.$$

Vì $(x-1)^2 - (x-2) = x^2 - 3x + 3 > 0$ nên $x-1-\sqrt{x-2} > 0$. Kết hợp với phương trình trên, ta được $x-1-\sqrt{x-2} = 2$, hay $x-3 = \sqrt{x-2}$. Từ đây, ta suy ra $x \geq 3$ và $(x-3)^2 = x-2$.

Giải ra, ta được $x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \neq 0$. Với chú ý

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y - \sqrt{xy}).$$

Và $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành

$$x + y - \sqrt{xy} = 7. \quad (1)$$

Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $9y + 49 + (x + y)^2 = 23(x + y)$, hay

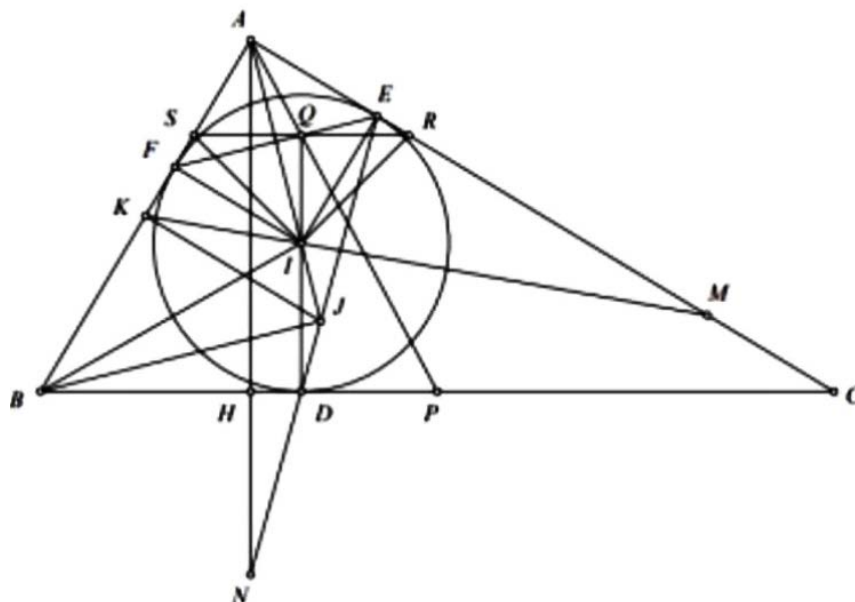
$$9(7 + \sqrt{xy} - x) + 49 + (\sqrt{xy} + 7)^2 = 23(\sqrt{xy} + 7).$$

Sau khi thu gọn, ta được $x(y - 9) = 0$. Từ đó $x = 0$ hoặc $y = 9$. . Kết hợp với (1), ta tìm được các nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình đã cho là $(0, 7)$, $(1, 9)$ và $(4, 9)$.

Bài 3. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi J là giao điểm của AI và DE ; K là trung điểm của AB .

- Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.
- Gọi M là giao điểm của KI và AC , N là giao điểm của AH và ED . Chứng minh $AM = AN$
- Gọi Q là giao điểm của DI và EF , P là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $CD = CE$ nên tam giác CDE cân tại C . Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{CED} = \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2}$.

Áp dụng tính chất góc ngoài trong tam giác AJE , ta thấy

$$\widehat{AJE} = \widehat{CEJ} = \widehat{EAJ} = \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{IBD}. \text{ Suy ra tứ giác } BIJD \text{ nội tiếp.}$$

b) Do tứ giác $BIJD$ nội tiếp nên $\widehat{BJI} = \widehat{BDI} = 90^\circ$.

Vì $\widehat{AJB} = 90^\circ$ và $\widehat{JAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ$ nên tam giác JAB vuông cân tại J . Theo giả thiết K là trung điểm của AB ,

ta có $JK \perp AB$

Chú ý rằng $IF \parallel AM \parallel JK$ (cùng vuông góc với AB) và $ID \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC), ta có

$$\frac{IF}{AM} = \frac{KI}{KM} = \frac{JI}{JA} = \frac{ID}{AN}. \text{ Vì } IF = ID \text{ nên } AM = AN.$$

c) Đường thẳng qua Q vuông góc với ID cắt AC, AB lần lượt lại R, S .

Vì $\widehat{IQR} = \widehat{IQS} = \widehat{IER} = \widehat{IFS} = 90^\circ$ nên các tứ giác $IQER, IQSR$ nội tiếp. Chú ý rằng tam giác IEF cân tại I , ta có $\widehat{IRQ} = \widehat{IEQ} = \widehat{IFQ} = \widehat{ISQ}$. Suy ra, tam giác IRS cân tại I . Do $IQ \perp RS$ nên Q là trung điểm của RS .

Ta có $RS \parallel BC$ (cùng vuông góc với ID) và P, Q lần lượt là trung điểm của BC, RS nên A, P, Q thẳng hàng (theo bổ đề hình thang).

Bài 4. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$

a) Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{2}{3}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} + \frac{2z+3}{4z+2}$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có

$$\sqrt{(2x+1)(2y+1)} = 5 - 2z.$$

Từ đó kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} = \frac{1}{5-2z} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{4}{5-2z+2z-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi chẳng hạn $x = y = z = 1$.

b) Ta thấy rằng

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2y+1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2z+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} \right) + \frac{1}{2z+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và sử dụng kết quả ở ý (a) ta được

$$P \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

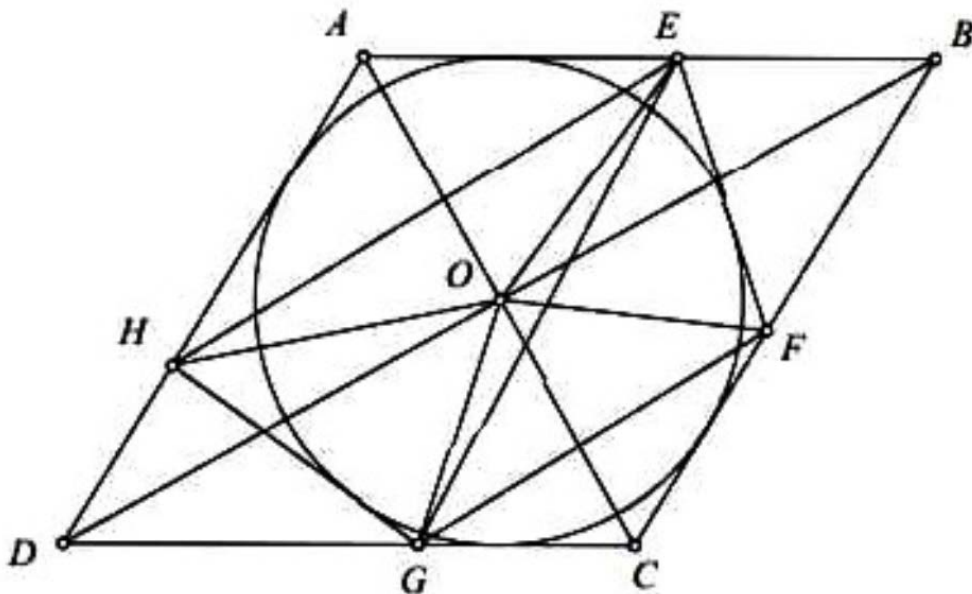
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O) .

a) Chứng minh $CG.AH = AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG .

Lời giải.



a) Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi $ABCD$ nên O là trung điểm của hai đường chéo AC và BD .

Ta thấy O là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác DGH . Suy ra $\widehat{GOH} = 180^\circ - \widehat{OGH} - \widehat{OHG} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{DGH}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{DHG}}{2} = \frac{\widehat{DHG} + \widehat{DGH}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{GDH}}{2}$.

Do tam giác DAC cân tại D nên $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = \frac{180^\circ - \widehat{ADC}}{2}$. Kết hợp hai điều trên, ta thấy

$$\widehat{GOH} = \widehat{DAC} = \widehat{DCA}.$$

Từ đó $\widehat{COG} = 180^\circ - \widehat{GOH} - \widehat{AOH} = 180^\circ - \widehat{OAH} - \widehat{AOH} = \widehat{AHO}$.

Suy ra hai tam giác OAH và GCO đồng dạng góc-góc. Vì thế, $\frac{OA}{GC} = \frac{AH}{CO}$.

Suy ra $AH.CG = OA.CO = OA^2$.

b) Chứng minh tương tự ý trên, ta có $AE.CF = OA^2 = AH.CG$. Suy ra $\frac{AE}{CK} = \frac{AH}{CF}$. Chú ý rằng $\widehat{EAH} = \widehat{GCF}$, ta thu được hai tam giác AEH và CGF đồng dạng cạnh-góc-cạnh. Suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{CGF}$. Lại có $\widehat{AEG} = \widehat{CGE}$ (do $AB \parallel CD$). Suy ra $\widehat{HEG} = \widehat{FGE}$.

Vậy $EH \parallel FG$ (đpcm).

Bài 6. (1,0 điểm) Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ là số nguyên tố.

- Chứng minh $a < 0$.
- Tìm tất cả các số nguyên a, b, c ($a < b < c$) sao cho n là một ước của 2023.

Lời giải.

a) Giả sử $a \geq 0$, khi đó $b \geq 1$ và $c \geq 2$. Ta có

$n = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ là số nguyên tố, mà $a + b + c > 1$

Nên $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$, hay $(b - a)^2 + (c - b)^2 + (c - a)^2 = 2$.

Vì $c > b > a$ nên $(b - a)^2 + (c - b)^2 + (c - a)^2 \geq 1^2 + 1^2 + 2^2 > 2$. Từ mâu thuẫn nhận được, ta suy ra $a < 0$.

b) Nếu $c \leq 0$, thì ta có $a + b + c < 0$, suy ra $n < 0$, mâu thuẫn. Do đó $c \geq 1$. Như vậy

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}[(b - a)^2 + (c - b)^2 + (c - a)^2] \\ &\geq \frac{1}{2}(c - a)^2 \geq \frac{1}{2}[1 - (-1)]^2 = 2 > 1. \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên tố và là ước của $2023 = 7.17^2$ nên $n \in \{7, 17\}$.

Trường hợp 1: $n = 17$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 17$

và $a + b + c = 1$. Từ đó, ta dễ dàng tính được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + (a + b + c)^2 = 35.$$

Mâu thuẫn vì 35 không chia hết cho 3

Trường hợp 2: $n = 7$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 7$

và $a + b + c = 1$. Từ đó $3(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + (a + b + c)^2 = 15$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ và $ab + bc + ca = -2$.

Do $5 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 + c^2$ nên $c \leq 2$. Mà $c \geq 1$ nên $c \in \{1, 2\}$.

- Nếu $c = 2$, thì ta có $a^2 + b^2 = 1$. Suy ra $a^2 \leq 1$, tức $a \geq -1$. Mà $a < 0$ nên $a = -1$ và $b = 0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

- Nếu $c = 1$, thì ta có $a^2 + b^2 = 4$. Suy ra $a^2 \leq 4$, tức $a \geq -2$. Mà $a < 0$ nên $a \in \{-1, -2\}$. Thử trực tiếp, ta được $a = -2$ và $b = 0$. Tuy nhiên, các số $a = -2, b = 0$ và $c = 1$ không thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Vậy, có duy nhất một bộ số (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1, 0, 2)$.