

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{9x-18\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A < 3$.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2)x - 3 - m = 0$ với m là tham số.

a) Chứng tỏ phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính giá trị $P = \frac{5x_1(1-2x_2)}{10-x_2}$.

Câu 3 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x - 6y + 4 = 0 \\ 4y + \sqrt[3]{13x+1} = x+9 \end{cases}$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ; gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp đỉnh A của tam giác ABC . Đoạn thẳng IK cắt (O) tại M và cắt BC tại D .

a) Chứng minh rằng M cách đều các điểm B, I, C .

b) Chứng minh rằng $MK^2 = MD.MA$.

c) Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R . Gọi giao điểm của IP và QR là T . Chứng minh rằng ba đường thẳng AT, OM và BC đồng quy.

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1) $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a + b + c$.

2) $\frac{a^4b}{a^2+abc} + \frac{b^4c}{b^2+abc} + \frac{c^4a}{c^2+abc} \geq \frac{3}{2}$.

b) Cho một hình vuông cạnh bằng 62 (cm), trên hình vuông đó ta đặt bất kỳ 2024 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ (cm) chứa ít nhất 3 điểm trong 2024 điểm nói trên.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:SBD:

Chữ ký của giám thị 1:Chữ ký của giám thị 2:

HDC CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{9x-18\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A < 3$.

Lời giải

a) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{9x-18\sqrt{x}} \\ A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ A &= \frac{4\sqrt{x}+2+3\sqrt{x}-6-5\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} \\ A &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} \\ A &= \frac{9\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$A < 3 \Rightarrow \frac{9\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} < 3 \Rightarrow 3\sqrt{x} < 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$$

Vậy $0 < x < 1$ thì $A < 3$.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2)x - 3 - m = 0$ với m là tham số.

a) Chứng tỏ phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính giá trị $P = \frac{5x_1(1-2x_2)}{10-x_2}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + 2(m-2)x - 3 - m = 0$ (1)

a) Phương trình có :

$$\Delta' = (m-2)^2 - 1 \cdot (-3-m) = m^2 - 4m + 4 + m + 3 = m^2 - 3m + 7 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

b) Với mọi m thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Vi-et, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 4 \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2m + 4 - x_1 \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Xét biểu thức } P = \frac{5x_1(1-2x_2)}{10-x_2}.$$

P xác định khi $x_2 \neq 10 \Rightarrow (1)$ có nghiệm khác 10

$$\Rightarrow 10^2 + 2(m-2) \cdot 10 - 3 - m \neq 0 \Rightarrow 100 + 20m - 40 - 3 - m \neq 0 \Rightarrow 19m \neq -57 \Rightarrow m \neq -3$$

Khi đó ta có

$$P = \frac{5x_1 - 10x_1x_2}{10 - x_2} = \frac{5x_1 - 10(-3-m)}{10 - (-2m+4-x_1)} = \frac{5x_1 + 30 + 10m}{x_1 + 6 + 2m} = \frac{5(x_1 + 6 + 2m)}{x_1 + 6 + 2m} = 5$$

Vậy với $m \neq -3$ thì $P = 5$.

Câu 3 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x - 6y + 4 = 0 \\ 4y + \sqrt[3]{13x+1} = x+9 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x - 6y + 4 = 0 & (1) \\ 4y + \sqrt[3]{13x+1} = x+9 & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x - 6y + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (2x-y)(x-2y) + 2(2x-y) + 2(x-2y) + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (2x-y)(x-2y+2) + 2(x-2y+2) = 0 \\ &\Rightarrow (x-2y+2)(2x-y+2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 2x+2 \\ y = \frac{x+2}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

+) Với $y = 2x+2$, thay vào (2) ta được

$$4(2x+2) + \sqrt[3]{13x+1} = x+9$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{13x+1} = 1-7x$$

$$\Rightarrow 13x+1 = 1-21x+147x^2-343x^3$$

$$\Rightarrow 343x^3-147x^2+34x=0$$

$$\Rightarrow x(343x^2-147x+34)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 343x^2-147x+34=0 \end{cases}$$

$$343x^2-147x+34=0 \text{ vô nghiệm vì } \Delta = (-147)^2 - 4.34.343 < 0$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=2$$

+) Với $y = \frac{x+2}{2}$, thay vào (2) ta được:

$$4. \frac{x+2}{2} + \sqrt[3]{13x+1} = x+9$$

$$\Rightarrow 2x+4 + \sqrt[3]{13x+1} = x+9$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{13x+1} = 5-x$$

$$\Rightarrow 13x+1 = 125-75x+15x^2-x^3$$

$$\Rightarrow x^3-15x^2+88x-124=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2-13x+62)=0$$

$$x^2-13x+62=0 \text{ vô nghiệm vì } \Delta = (-13)^2 - 4.1.62 < 0$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2$$

Vậy hệ có tập nghiệm là $S = \{(0;2);(2;2)\}$

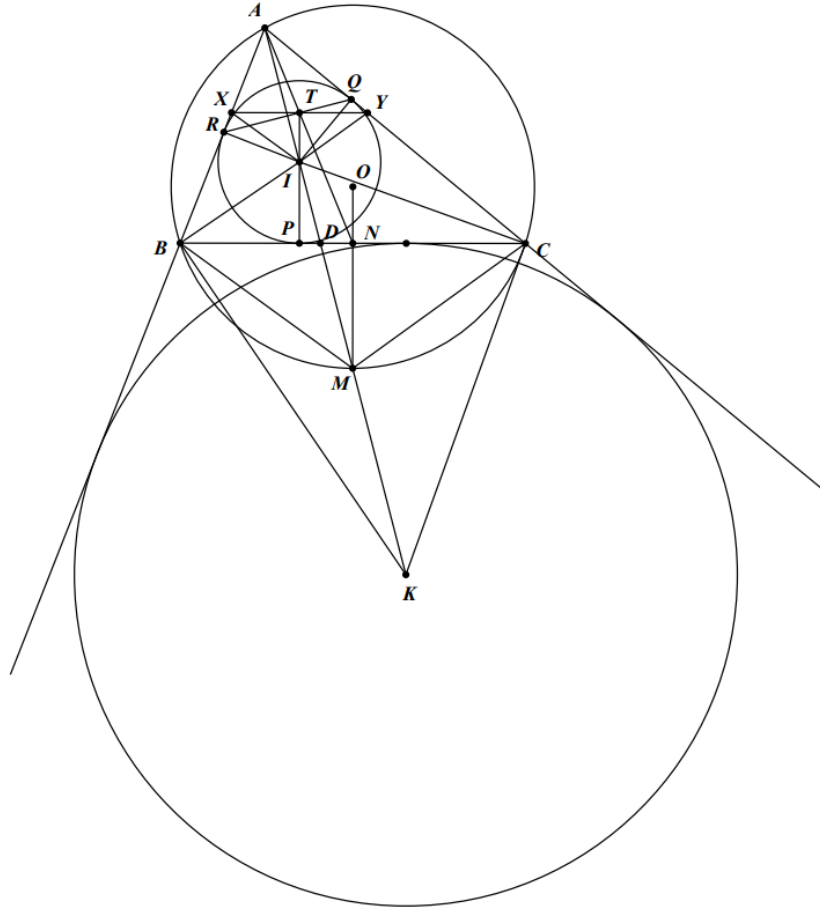
Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ; gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp đỉnh A của tam giác ABC . Đoạn thẳng IK cắt (O) tại M và cắt BC tại D .

a) Chứng minh rằng M cách đều các điểm B, I, C .

b) Chứng minh rằng $MK^2 = MD.MA$.

c) Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R . Gọi giao điểm của IP và QR là T . Chứng minh rằng ba đường thẳng AT, OM và BC đồng quy.

Lời giải



a) Chứng minh rằng M cách đều các điểm B, I, C.

Ta có I, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc $A \Rightarrow I, K$ thuộc tia phân giác góc BAC ; BI, CI là phân giác trong của góc $ABC; ACB$; BK, CK là phân giác ngoài của $ABC; ACB$. Do hai tia phân giác của góc trong và góc ngoài là hai góc kề bù thì vuông góc với nhau nên

$BI \perp BK; CI \perp CK \Rightarrow \angle IBK = \angle ICK = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BICK$ nội tiếp đường tròn đường kính IK .

A, I, M, K cùng thuộc tia phân giác của góc $BAC \Rightarrow \angle BAM = \angle CAM \Rightarrow BM = CM$ (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow BM = CM$ (hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau) (1).

Lại có: $\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle CAM = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}$.

$\angle MIB$ là góc ngoài của $\triangle AIB \Rightarrow \angle MIB = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2}$.

$\Rightarrow \angle IBM = \angle MIB \Rightarrow \triangle MIB$ cân tại $M \Rightarrow MB = MI$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $MI = MB = MC$, vậy M cách đều 3 điểm B, I, C .

b) Chứng minh rằng $MK^2 = MD.MA$.

Theo ý a) ta có tứ giác $BICK$ nội tiếp đường tròn đường kính IK và $MI = MB = MC \Rightarrow M$ là tâm đường tròn đường kính $IK \Rightarrow M$ là trung điểm của $IK \Rightarrow MI = MB = MC = MK$ (3).

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAB$ có:

M chung; $\angle MBD = \angle MAD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle MAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow MB^2 = MD.MA$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow MK^2 = MD.MA$.

c) Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi giao điểm của IP và QR là T. Chứng minh rằng ba đường thẳng AT, OM và BC đồng quy.

Qua T kẻ đường thẳng $XY \parallel BC$ cắt AB tại X , cắt AC tại Y .

Lại có: $IP \perp BC$ (tính chất của tiếp tuyến) $\Rightarrow IP \perp XY$, theo tính chất của tiếp tuyến ta có $IR \perp AB; IQ \perp AC$.

Tứ giác $IRXT$ có: $IRX = ITX = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $IRXT$ nội tiếp đường tròn đường kính $IX \Rightarrow IRT = IXT$ (hai góc nội tiếp cùng chắn IT).

Tứ giác $IYQT$ có: $ITY = IQY = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $IYQT$ nội tiếp đường tròn đường kính $IY \Rightarrow IQT = IYT$ (hai góc nội tiếp cùng chắn IT).

Lại có $IR = IQ$ (bán kính của (I)) $\Rightarrow \Delta IRQ$ cân tại $I \Rightarrow IRT = IQT \Rightarrow IXT = IYT \Rightarrow \Delta IXY$ cân tại I có IT là đường cao nên cũng là trung tuyến $\Rightarrow T$ là trung điểm của $XY \Rightarrow XT = YT$.

Gọi N là giao điểm của AT và BC , vì $XY \parallel BC$, nên theo hệ quả của định lý Thales, ta có:

$$\frac{XT}{BN} = \frac{AT}{AN} = \frac{YT}{CN} \text{ mà } XT = YT \Rightarrow BN = CN \Rightarrow N \text{ là trung điểm của } BC.$$

Lại có: $MB = MC \Rightarrow M$ là điểm chính giữa $BC \Rightarrow OM \perp BC$ tại trung điểm của $BC \Rightarrow OM$ đi qua trung điểm N của BC .

Vậy AT, OM, BC đồng quy tại trung điểm N của BC .

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

$$1) \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a + b + c. \quad 2) \quad \frac{a^4b}{a^2 + abc} + \frac{b^4c}{b^2 + abc} + \frac{c^4a}{c^2 + abc} \geq \frac{3}{2}.$$

b) Cho một hình vuông cạnh bằng 62 (cm), trên hình vuông đó ta đặt bất kỳ 2024 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ (cm) chứa ít nhất 3 điểm trong 2024 điểm nói trên.

Lời giải

a) Với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, ta có

1) Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$ab^2 + ab^2 + bc^2 \geq 3\sqrt[3]{ab^2 \cdot ab^2 \cdot bc^2} = 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2} = 3\sqrt[3]{(abc)^2 \cdot b^3} = 3b$$

$$bc^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3\sqrt[3]{bc^2 \cdot bc^2 \cdot ca^2} = 3\sqrt[3]{b^2c^5a^2} = 3\sqrt[3]{(abc)^2 \cdot c^3} = 3c$$

$$ca^2 + ca^2 + ab^2 \geq 3\sqrt[3]{ca^2 \cdot ca^2 \cdot ab^2} = 3\sqrt[3]{c^2a^5b^2} = 3\sqrt[3]{(abc)^2 \cdot a^3} = 3a$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 3(a + b + c) \Rightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a + b + c$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} ab^2 = bc^2 = ca^2 \\ abc = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 1.$$

2) Áp dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu, ta có:

$$\frac{a^4b}{a^2 + abc} = \frac{a^4b}{a^2 + 1} = a^2b - \frac{a^2b}{a^2 + 1} \geq a^2b - \frac{a^2b}{2a} = a^2b - \frac{ab}{2}$$

$$\frac{b^4c}{b^2 + abc} = \frac{b^4c}{b^2 + 1} = b^2c - \frac{b^2c}{b^2 + 1} \geq b^2c - \frac{b^2c}{2b} = b^2c - \frac{bc}{2}$$

$$\frac{c^4a}{c^2 + abc} = \frac{c^4a}{c^2 + 1} = c^2a - \frac{c^2a}{c^2 + 1} \geq c^2a - \frac{c^2a}{2c} = c^2a - \frac{ca}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq (a^2b + b^2c + c^2a) - \frac{ab + bc + ca}{2}$$

Lại có:

$$a^2b + a^2b + b^2c \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c} = 3\sqrt[3]{(abc)a^3b^3} = 3ab$$

$$b^2c + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{b^4c^4a} = 3\sqrt[3]{(abc)b^3c^3} = 3bc$$

$$c^2a + c^2a + a^2b \geq 3\sqrt[3]{c^4a^4b} = 3\sqrt[3]{(abc)c^3a^3} = 3ca$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow P \geq ab + bc + ca - \frac{ab + bc + ca}{2} = \frac{ab + bc + ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

b) Chia hình vuông ban đầu thành $31.31 = 961$ hình vuông nhỏ có cạnh bằng 2 cm . Vì có 2024 điểm được chia vào 961 hình vuông nhỏ này nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một hình vuông chứa ít nhất $\left\lceil \frac{2024}{961} \right\rceil + 1 = 3$ điểm. Mà 3 điểm này nằm trong hình vuông có cạnh bằng 2 nên nó nằm trong đường tròn có đường kính là đường chéo của hình vuông nên có bán kính $R = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$.

Vậy tồn tại một đường tròn có bán kính $\sqrt{2} \text{ (cm)}$ chứa ít nhất 3 điểm trong 2024 điểm nói trên.

-----HẾT-----