

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 17/8/2024

Đề thi này có 01 trang

Bài 1: (5,0 điểm)

Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6$ và $u_{n+1} = 3u_n + \frac{3^n}{u_n}$, với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_n}{3^n}$, với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 2: (5,0 điểm)

a) Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x)), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Biết $f(0)$ khác 0. Chứng minh rằng f đơn ánh.

b) Số nguyên dương n được gọi là “đẹp” nếu như tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n , có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Tập nghiệm của $P(x)$ có chứa các số $-3; -1; 1$ và 3 .

Chứng minh rằng $n = 4$ và $n = 6$ không phải là số đẹp. Từ đó tìm tất cả các số đẹp.

Bài 3: (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) , hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn, BC không là đường kính của (O) , điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC không cân tại A . Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D . Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm E khác A . Kẻ đường kính EF của (O) , gọi M là giao điểm của BF và CE , N là giao điểm của CF và BE , P là giao điểm của AF và MN .

a) Chứng minh rằng D là trung điểm của MN .

b) Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4: (5,0 điểm)

Với k là số nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = k.$$

a) Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$ thì phương trình trên vô nghiệm.

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $k \leq 2024$ để phương trình trên có nghiệm nguyên dương?

--- HẾT ---

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Giám thị 1: Chữ ký của Giám thị 2: