

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9

AN GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2024-2025

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. a) Khử căn ở biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn : $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} = x$ với $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tính giá trị biểu thức $B = 2a + b + c$

Bài 2. 1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+26=5y-14z \\ 55-2x=7y-z \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi : $z = -2$

b) Tìm GTLN của $P = x.y$

2) Cho hai hàm số : $y = x^2$ và $y = 3ax - a^2$ (a là tham số khác 0). chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm gọi hai điểm đã cho là $x_1; y_1, x_2; y_2$. Tìm các giá trị của a để $y_1 + y_2 = 28$

Bài 3. a) Cho m, n lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2024 = 0$

Tính giá trị của biểu thức : $S = n^3 + m^2 - 2024n$

b) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho n vừa là tổng của 5 số tự nhiên vừa là tổng của 7 số tự nhiên liên tiếp

Bài 4. a) Cho tam giác ABC vuông tại B có $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 6$ cm. Vẽ tia Bx sao cho $\angle xBC = 30^\circ$ cắt đường thẳng AC tại D . Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AB

b) Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD biết $2MN = AB - CD$. Chứng minh rằng AD vuông góc BC .

Bài 5. Quan sát biểu đồ dưới đây. Hãy so sánh điểm trung bình môn toán của nhóm học sinh A và nhóm học sinh B. Bằng lý luận toán học hãy chỉ ra nhóm nào làm bài tập tốt hơn nhóm còn lại?



HƯỚNG DẪN THAM KHẢO

Bài 1. a) Khử căn ở biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

b) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn : $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} = x$ với $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tính giá trị biểu thức $B = 2a + b + c$

Hướng dẫn

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} = x \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = x^4 \quad (1)$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^3 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow x^4 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

Thay vào phương trình (1) ta được : $a \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow 3a + \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{2} + c - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6a + a\sqrt{5} + b + b\sqrt{5} + 2c - 7 - \sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a + b + 2c - 7) + \sqrt{5}(a + b - 1) = 0$$

* *Nếu* $a + b - 1 \neq 0$ thì vế trái là số vô tỉ (trái với giả thiết a, b, c là các số nguyên)

$$* \text{ *Nên* } a + b - 1 = 0 \text{ suy ra : } \begin{cases} 3a + b + 2c - 7 = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b + 2c = 7 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (4a + 2b + 2c) - (a + b) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 2b + 2c = 8 \Leftrightarrow 2a + b + c = 4$$

Vậy $B = 4$

Bài 2. 1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+26=5y-14z \\ 55-2x=7y-z \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi : $z = -2$

Hướng dẫn

Khi : $z = -2$ hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 3x+26=5y+28 \\ -2x+55=7y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=2 \\ -2x-7y=-53 \end{cases} \text{ giải ra ta có : } x=9; y=5$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm : $x=9; y=5$

b) Tìm GTLN của $P = x.y$

Hướng dẫn

$$\begin{cases} 3x+26=5y-14z \\ 55-2x=7y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+26=5y-14z \\ -2x+55=7y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+52=10y-28z \\ -6x+165=21y-3z \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ trên ta được } \begin{cases} y = z + 7 \\ x = 3 - 3z \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } P = x.y = (z+7).(3-3z) = (z+7).(3-3z) = -3z^2 - 18z + 21 = -3(z+3)^2 + 48$$

$$\text{mà } -3(z+3)^2 + 48 \leq 48$$

Vậy: giá trị lớn nhất của $P = 48$ khi $x = -3$

2) Cho hai hàm số : $y = x^2$ và $y = 3ax - a^2$ (a là tham số khác 0) . chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm gọi hai điểm đã cho là $x_1; y_1$, $x_2; y_2$. Tìm các giá trị của a để $y_1 + y_2 = 28$

Hướng dẫn

* Xét tương giao của hai đồ thị hàm số : $y = x^2$ và $y = 3ax - a^2$ ta có

$$x^2 = 3ax - a^2 \text{ hay } x^2 - 3ax + a^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (-3a)^2 - 4a^2 = 5a^2 ; \Delta \geq 0 \text{ với } \forall a \neq 0$$

Vậy : hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt (Với $a \neq 0$)

* Tìm các giá trị của a để $y_1 + y_2 = 28$

hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm là $x_1; y_1$, $x_2; y_2$. Thì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1) Ta có :

$$y_1 + y_2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2^2 - 2x_1.x_2 = 28 \quad (2)$$

(1) Theo VI-ET ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a \\ x_1.x_2 = a^2 \end{cases}$ thay vào (2) ta được :

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 2a^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 2a^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Vậy : $a = \pm 2$ thì $y_1 + y_2 = 28$

Bài 3. a) Cho m, n lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2024 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức : $S = n^3 + m^2 - 2024n$

Hướng dẫn

* Xét : $S = n^3 + m^2 - 2024n$

$$= n^3 + m^2 + n(n^2 - n - 2024) - n^3 + n^2 \text{ (mà } n^2 - n - 2024 = 0 \text{)}$$

Suy ra : $S = n^2 + m^2$ mà m, n lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2024 = 0$.

Theo Vi- et ta có : $\begin{cases} n + m = 1 \\ n.m = -2024 \end{cases}$

$$S = n^2 + m^2 = (m + n)^2 - 2mn = 1 - 2.(-2024) = 4049 ;$$

Vậy : $S = 4049$

b) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho n vừa là tổng của 5 số tự nhiên vừa là tổng của 7 số tự nhiên liên tiếp

Hướng dẫn

* Khi n là tổng của 5 số tự nhiên liên tiếp ta có :

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) \text{ (với } a \in \mathbb{N} \text{)}.$$

$$= 5a + 10 = 5(a + 2) : 5$$

* Khi n là tổng của 7 số tự nhiên liên tiếp ta có :

$$n = b + (b + 1) + (b + 2) + (b + 3) + (b + 4) + (b + 5) + (b + 6) \text{ (với } b \in \mathbb{N} \text{)}.$$

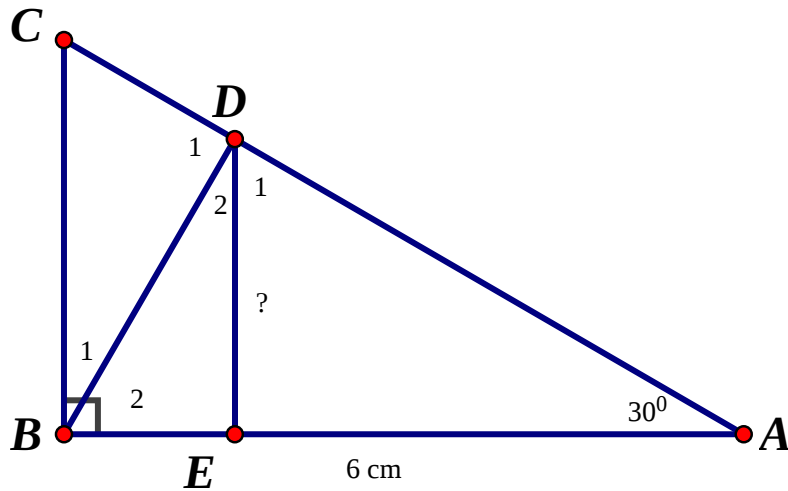
$$= 7(b + 3) : 7$$

Suy ra : $\begin{cases} n : 5 \\ n : 7 \end{cases}$ hay $n \in BC(5, 7)$ và n nhỏ nhất nên $n \in BCNN(5, 7) = 35$

Vậy $n = 35$

Bài 4. a) Cho tam giác ABC vuông tại B có $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 6 \text{ cm}$. Vẽ tia Bx sao cho $\angle xBC = 30^\circ$ cắt đường thẳng AC tại D . Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AB

Hướng dẫn



Ta có : $A + C = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau)

$$\Rightarrow C = 60^\circ$$

Mà $B_1 = 30^\circ$ (gt) $\Rightarrow B_1 + C = 90^\circ$ hay $\triangle BDA$ vuông tại D

$$\Rightarrow BD = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}) \text{ (tính chất cạnh đối diện góc } 30^\circ \text{)}$$

Kẻ $DE \perp AB \Rightarrow D_2 = B_1 = 30^\circ$ (hai góc so le trong)

$$\Rightarrow BE = \frac{BD}{2} = \frac{3}{2} = 1,5(\text{cm})$$

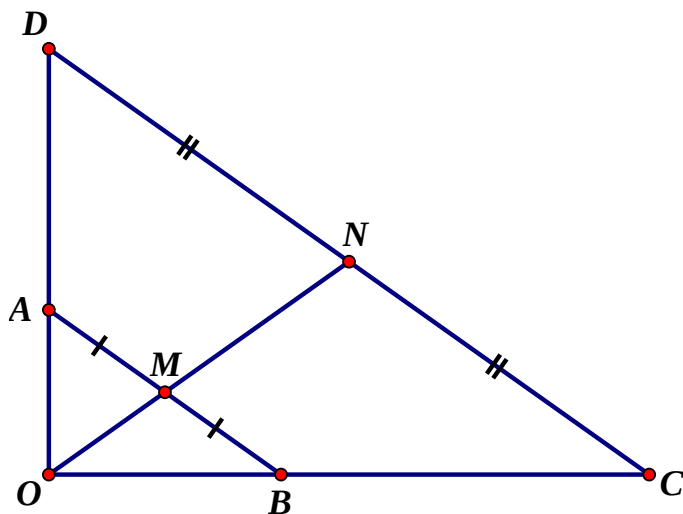
Áp dụng định lý PYTAGO : $\triangle BDE$ vuông tại E :

$$\Rightarrow BD^2 = DE^2 + BE^2 \Rightarrow DE^2 = BD^2 - BE^2 \Rightarrow DE = \sqrt{BD^2 - BE^2}$$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy khoảng cách từ } D \text{ đến đường thẳng } AB \text{ là : } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

b) Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD biết $2MN = AB - CD$. Chứng minh rằng AD vuông góc BC.

Hướng dẫn



Áp dụng tính chất : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

Gọi O là giao điểm của DA và CB

Để dàng chứng minh được O, M, N thẳng hàng.

* Vì $AM \parallel DN \Rightarrow \triangle OAM \sim \triangle ODN$ (hệ quả Talet)

$$\Rightarrow \frac{ON}{OM} = \frac{DN}{AM} \Rightarrow \frac{ON}{ON-OM} = \frac{DN}{DN-AM}$$

$$\Rightarrow \frac{ON}{MN} = \frac{DN}{MN} \Rightarrow ON = DN$$

* Mà $2MN = CD - AB \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(CD - AB) = DN - AM$

$\Rightarrow NC = ON = DN \Rightarrow \triangle ODC$ vuông tại O. $\Rightarrow AD \perp BC$ (đpcm)

Bài 5. Quan sát biểu đồ dưới đây . Hãy so sánh điểm trung bình môn toán của nhóm học sinh A và nhóm học sinh B . Bằng lý luận toán học hãy chỉ ra nhóm nào làm bài tập tốt hơn nhóm còn lại?

Hướng dẫn



a) Lập bảng thống kê số lượng học sinh theo điểm số lớp nhóm A

Điểm số	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	1	1	3	3	3	2	1

Điểm trung bình môn toán của nhóm học sinh A :

$$\frac{1.3 + 1.4 + 1.5 + 3.6 + 3.7 + 3.8 + 2.9 + 1.10}{1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1} = 6,8(6)$$

b) Lập bảng thống kê số lượng học sinh theo điểm số lớp nhóm B

Điểm số	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	0	0	3	4	3	3	1	0

Điểm trung bình môn toán của nhóm học sinh B:

$$\frac{0.3 + 0.4 + 3.5 + 4.6 + 3.7 + 3.8 + 1.9 + 0.10}{3 + 4 + 3 + 3 + 1} = 6,6(4)$$

+ So sánh:

- Theo điểm số trung bình, ta có: $6,8(6) > 6,6(4)$ do đó điểm số của học sinh nhóm A cao hơn điểm số của học sinh nhóm B

- Do đó nhóm A làm bài tập tốt hơn nhóm B