

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (1,5 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $ab = 2$. Chứng minh :

$$a^9 + b^9 = (a^4 + b^4)(a^5 + b^5) - 16(a + b)$$

Câu 2. (1,5 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{16x^2 - 1} - 2\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x - 1} = 2$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 3b + 5c = 2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3ab}{a + 3b} + \frac{15bc}{3b + 5c} + \frac{5ca}{5c + a}$

Câu 4. (1,0 điểm) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương. Chứng minh $15n + 8$ là hợp số .

Câu 5. (1,0 điểm) Bạn Chi được thưởng mỗi ngày ít nhất một chiếc kẹo, nhưng trong 7 ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận được không quá 10 chiếc. Chứng minh trong một số ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận là 27 chiếc.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) , từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Vẽ đường kính CD của đường tròn (O) . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M khác D

a) Chứng minh $\triangle AMB \sim \triangle ABD$

b) Gọi N là giao điểm của BM và AO . Chứng minh $NH^2 = NM \cdot NB$

Câu 7. (2,0 điểm) Cho đường tròn $(I; r)$ nội tiếp tam giác ABC . Điểm M thuộc cạnh BC với $M \neq B, M \neq C$. Đường tròn $(I_1; r_1)$ nội tiếp tam giác AMC . Đường thẳng song song với BC , tiếp xúc với đường tròn $(I_1; r_1)$ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại B', C' . Gọi N là giao điểm của AM với $B'C'$, đường tròn (I_2, r_2) nội tiếp tam giác $AB'N$. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, I, I_1, I_2 cùng nằm trên một đường tròn

b) $r = r_1 + r_2$

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned}
 & (a^4 + b^4)(a^5 + b^5) - 16(a + b) \\
 &= a^9 + b^9 + a^5b^4 + a^4b^5 - 16(a + b) \\
 &= a^9 + b^9 + a^4b^4(a + b) - 16(a + b) \\
 &= a^9 + b^9 + (a + b)[(ab)^4 - 16] \\
 &= a^9 + b^9 + (a + b)(16 - 16) \quad (Do\ ab = 2) \\
 &= a^9 + b^9
 \end{aligned}$$

Câu 2. ĐK: $x \geq \frac{1}{4}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{16x^2 - 1} - 2\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x - 1} = 2 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{(4x + 1)(4x - 1)} - 2\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x - 1} - 2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{4x + 1}(\sqrt{4x - 1} - 2) + \sqrt{4x - 1} - 2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sqrt{4x + 1} + 1)(\sqrt{4x - 1} - 2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{4x - 1} - 2 = 0 \quad (Do\ \sqrt{4x + 1} + 1 > 0) \\
 & \Leftrightarrow 4x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} (tm)
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{5}{4}$

Câu 3.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương a và $3b$ ta có:

$$\frac{3ab}{a + 3b} \leq \frac{\left(\frac{a + 3b}{2}\right)^2}{a + 3b} = \frac{a + 3b}{4}.$$

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{15bc}{3b + 5c} \leq \frac{3b + 5c}{4}; \frac{5ca}{5c + a} \leq \frac{5c + a}{4}$

Từ đó suy ra $P \leq \frac{2(a+3b+5c)}{4} = 1010$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = 1010 \Leftrightarrow a = 3b = 5c = \frac{2020}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2020}{3} \\ b = \frac{2020}{9} \\ c = \frac{404}{3} \end{cases}$$

Câu 4.

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2n+1 = a^2 \\ 3n+1 = b^2 \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}^*)$$

Khi đó ta có:

$$9a^2 - b^2 = 9(2n+1) - (3n+1) \Leftrightarrow (3a-b)(3a+b) = 15n+8$$

Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ suy ra $3a+b > 1$. Ta cần chứng minh $3a-b > 1$

$$\text{Hay } 3\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1} > 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{2n+1} > 1 + \sqrt{3n+1}$$

$$\Leftrightarrow 9(2n+1) > 3n+2 + 2\sqrt{3n+1} \Leftrightarrow 15n+7 > \sqrt{12n+4} \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $15n+8$ là hợp số

Câu 5.

Xét 28 ngày liên tiếp từ ngày thứ nhất đến ngày thứ 28 mà Chi nhận được kẹo

Gọi $T(n)$ là tổng số kẹo Chi nhận được đến ngày thứ n . Vì tổng số kẹo Chi nhận được trong 7 ngày liên tiếp không vượt quá 10 chiếc nên ta có:

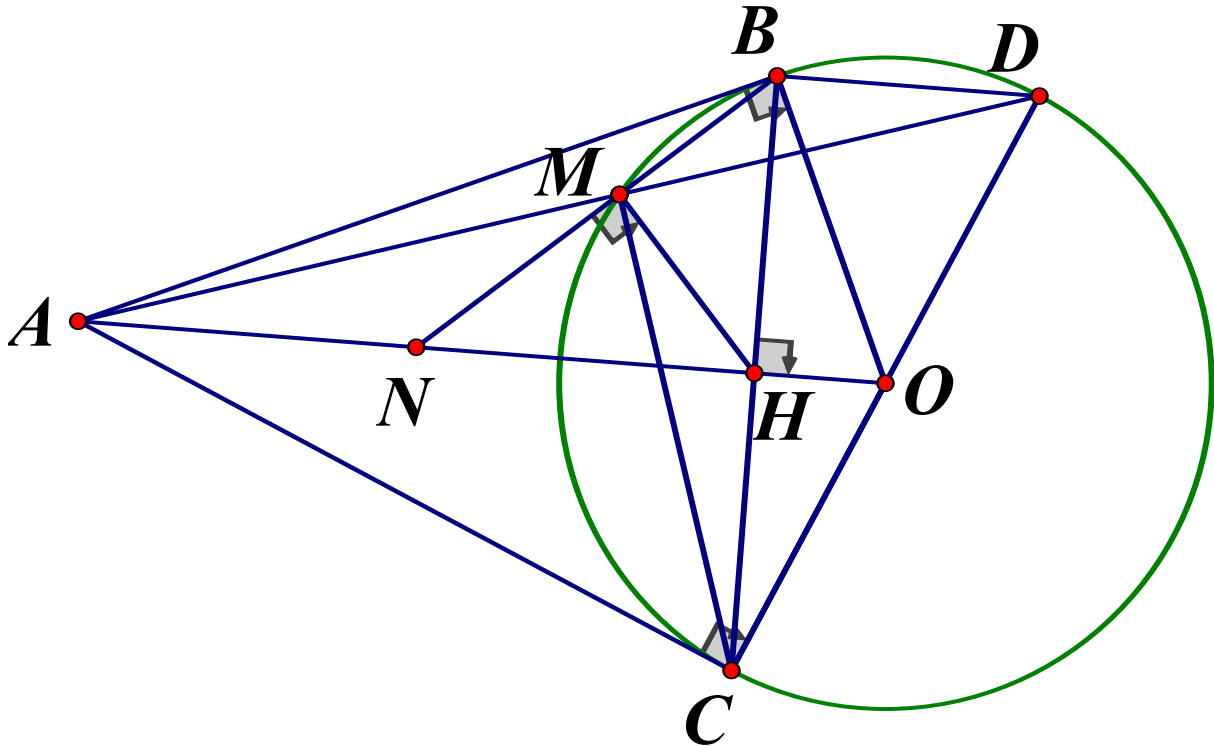
$$1 \leq T(1) < T(2) < \dots < T(28) \leq 40$$

Xét 28 số nguyên dương phân biệt $T(1), T(2), \dots, T(28)$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số $T(a) \equiv T(b) \pmod{27}$ với $1 \leq a < b \leq 28$ hay $[T(b) - T(a)] : 27$

Mặt khác ta có: $1 \leq T(b) - T(a) \leq 39$ suy ra $T(b) - T(a) = 27$

Vậy từ ngày thứ $a + 1$ đến ngày thứ b thì Chi nhận được đúng 27 chiếc kẹo.

Câu 6.



a) Xét tam giác AMB và tam giác ABD có:

$\angle ABM = \angle ADB$ (cùng chắn cung BM); $\angle A$ chung

$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ABD$ (g.g)

b) Xét $\triangle ABO$ vuông tại B, đường cao BH có: $AB^2 = AH \cdot AO$ (1)

Mặt khác $\triangle AMB \sim \triangle ABD$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \cdot AO = AM \cdot AD \Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AOD \Rightarrow \angle MHN = \angle MDC$

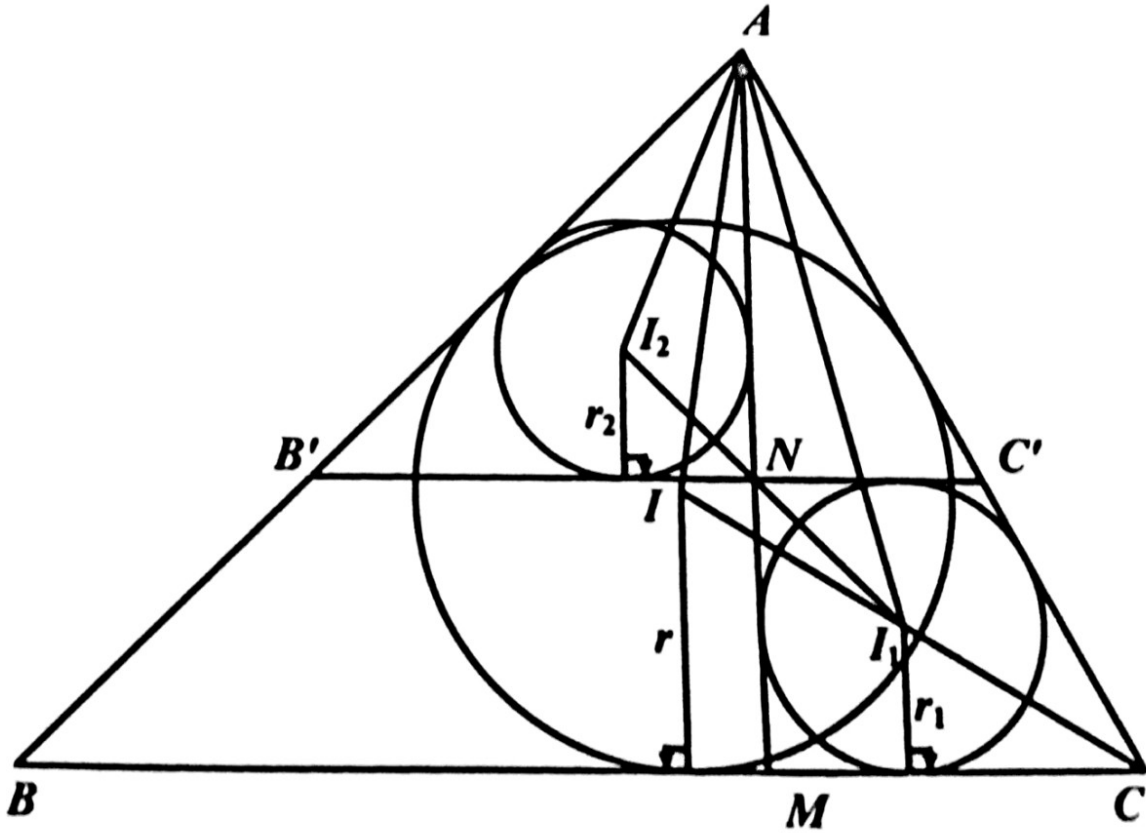
Mặt khác, $\angle MDC = \angle MBC$ (cùng chắn cung MC) $\Rightarrow \angle MHN = \angle MBH$

Xét hai tam giác NHM và NBH có:

$\angle MHN = \angle MBH$; $\angle MNH$ chung $\Rightarrow \triangle NHM \sim \triangle NBH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NH}{NB} = \frac{NM}{NH} \Rightarrow NH^2 = NB \cdot NM$$

Câu 7.



a) Ta có:

$$\angle I_2 N = \angle I_2 I_1 = 180^\circ - \frac{\angle A N B' + \angle B' A N}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A B' N}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A B' N}{2}$$

$$\text{Mà } B'C' \parallel BC \Rightarrow \angle A B' N = \angle A B C \Rightarrow \angle A I_2 I_1 = 90^\circ + \frac{\angle A B C}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có : } \angle A I C = \angle A I I_1 = 90^\circ + \frac{\angle A B C}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle I_2 I_1 = \angle A I I_1$ do đó 4 điểm A, I_2, I, I_1 cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xét tam giác $A I_2 I_1$ và $A I C$ có:

$$\widehat{I_2}AI_1 = \widehat{I}AC = \frac{\widehat{B}AC}{2}; \widehat{AI_2}I_1 = \widehat{A}IC \Rightarrow \Delta AI_2I_1 \cong \Delta AIC \Rightarrow \frac{I_2I_1}{IC} = \frac{AI_1}{AC} (*)$$

Xét ΔANI_1 và ΔAI_1C có: $\widehat{NAI_1} = \widehat{CAI_1}$; $\widehat{AI_1N} = \widehat{ACI_1} \Rightarrow \Delta ANI_1 \cong \Delta AI_1C (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{I_1N}{CI_1} = \frac{AI_1}{AC} (**). \text{ Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra}$$

$$\frac{I_1I_2}{IC} = \frac{I_1N}{CI_1} \Rightarrow \frac{CI_1}{CI} = \frac{I_1N}{I_1I_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Rightarrow r = r_1 + r_2 \left(\text{do } \frac{I_1N}{I_2N} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{I_1N}{I_1I_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)$$

Vậy $r = r_1 + r_2$