

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 > 0, u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + \frac{8}{u_n^2}), \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (5,0 điểm).

- a) Cho số nguyên dương n và hai số nguyên x, y . Chứng minh rằng nếu $x - y$ chia hết cho n thì $x^n - y^n$ chia hết cho n^2 .
- b) Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và S là tập hợp các số nguyên a thuộc đoạn $[0; n^2 - 1]$ sao cho **không** tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^n + y^n \equiv a \pmod{n^2}$. Chứng minh rằng số phần tử của S không nhỏ hơn C_n^2 .

Câu 3 (5,0 điểm).

- a) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm I bất kỳ trong tam giác. Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường thẳng BC tại M . Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ICA cắt đường thẳng CA tại N . Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB cắt đường thẳng AB tại P . Chứng minh rằng M, N, P cùng thuộc một đường thẳng l và l vuông góc với OI .
- b) Gọi B_1, C_1 là tâm các đường tròn bàng tiếp các góc B, C của tam giác ABC . Đường thẳng B_1C_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D (khác A). Các đường thẳng đi qua B_1 , vuông góc AC và đi qua C_1 , vuông góc AB cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\angle ADE = 90^\circ$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba đa thức bậc hai $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ có hệ số cao nhất dương. Biết rằng $P(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt a_1, a_2 , $Q(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt b_1, b_2 và $R(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn: $Q(a_1) + R(a_1) = Q(a_2) + R(a_2)$; $P(b_1) + R(b_1) = P(b_2) + R(b_2)$ và $P(c_1) + Q(c_1) = P(c_2) + Q(c_2)$. Chứng minh rằng $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương). Ban đầu ta tô màu đen cho k ô bất kỳ (k nguyên dương, $k \geq 2$). Sau đó, cứ mỗi bước ta được phép tô đen thêm một ô của bảng nếu ô đó có cạnh chung với ít nhất hai ô đen.

- a) Khi $m = 3, n = 5$. Hãy chỉ ra một cách tô 4 ô ban đầu sao cho sau hữu hạn bước tất cả các ô trong bảng đều được tô.
- b) Tìm số k nhỏ nhất theo m, n để sau hữu hạn bước, ta có thể tô đen tất cả các ô vuông trong bảng.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Chữ ký giám thị 1.....Chữ ký giám thị 2.....