

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} \right) + \left(\frac{x-3}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4}{x-2-2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right)$,

với $x > 2$ và $x \neq 3; x \neq 6$.

Tìm giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{5} \cdot (\sqrt{3}-1)$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3(x^2 - xy + y^2) = 7(x + y)$.

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$.

b) Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8A và 8B có tất cả 62 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8B tính số người quen ở lớp 8A và thấy rằng: bạn thứ nhất lớp 8B quen 13 bạn ở lớp 8A, bạn thứ hai lớp 8B quen 14 bạn ở lớp 8A, bạn thứ ba lớp 8B quen 15 bạn ở lớp 8A và cứ như vậy đến bạn cuối cùng của lớp 8B quen tất cả các bạn của lớp 8A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho đường tròn $(I; R)$ nội tiếp tam giác ABC , biết tam giác ABC cân tại A và $BAC = 120^\circ, AB = 2(2 + \sqrt{3})$. Đường tròn $(I; R)$ tiếp xúc các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E .

Một tiếp tuyến của đường tròn tại điểm bất kì thuộc cung nhỏ DE cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M và N

a) Chứng minh rằng $MN^2 = AM^2 + AN^2 + AM \cdot AN$

b) Tính bán kính R của đường tròn $(I; R)$

c) Chứng minh rằng $\frac{2}{3} < MN < 1$

Câu 4 (1,0 điểm).

Trong hộp có chứa 2024 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bi màu đỏ, 675 viên bi màu xanh, 675 viên bi màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bi vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bi bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ$. Chứng minh rằng $\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \geq 2$

Câu 6 (2,0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 25\sqrt{3x^2 - 3x^4} + 2\sqrt{4x^2 + 9x^4}$ (với $x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1$)

❧HẾT❧

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} \right) + \left(\frac{x-3}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4}{x-2-2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right)$,

với $x > 2$ và $x \neq 3; x \neq 6$.

Tìm giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{5} \cdot (\sqrt{3}-1)$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3(x^2 - xy + y^2) = 7(x + y)$.

Lời giải

a) Với $x > 2$ và $x \neq 3; x \neq 6$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} \right) + \left(\frac{x-3}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4}{x-2-2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} \right) + \left(\frac{x-3}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4}{x-2-2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x-2} \cdot (1-\sqrt{x-2}) + x-3}{(1+\sqrt{x-2})(1-\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4}{\sqrt{x-2} \cdot (\sqrt{x-2}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x-2}-1}{(1+\sqrt{x-2})(1-\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-2}-4-2(\sqrt{x-2}-2)}{\sqrt{x-2} \cdot (\sqrt{x-2}-2)} \right)$$

$$= \left(\frac{-(1-\sqrt{x-2})}{(1+\sqrt{x-2})(1-\sqrt{x-2})} \right) : \left(\frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2} \cdot (\sqrt{x-2}-2)} \right)$$

$$= \left(\frac{-1}{1+\sqrt{x-2}} \right) : \left(\frac{-1}{\sqrt{x-2}-2} \right) = \frac{\sqrt{x-2}-2}{1+\sqrt{x-2}}$$

Vậy $\frac{\sqrt{x-2}-2}{1+\sqrt{x-2}}$ với $x > 2$ và $x \neq 3; x \neq 6$

Ta có: $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{5}(\sqrt{3}-1)$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{5}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \sqrt{3}+1 - (\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1) + \sqrt{5}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \sqrt{3}+1 - \sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3}+1 + \sqrt{15} - \sqrt{5} = 2.$$

Lưu ý: Do theo đề bài điều kiện $x > 2$ mà đề lại yêu cầu tính giá trị tại $x = 2$ nên có lẽ ở đây đề bị lỗi.

b) Ta có: $3(x^2 - xy + y^2) = 7(x + y) \Leftrightarrow 3x^2 - (3y+7)x + 3y^2 - 7y = 0.$

Ta coi phương trình trên là phương trình bậc 2 ẩn x . Để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -27y^2 + 126y + 49 \geq 0$$

$$\Rightarrow -0,3 \leq y \leq 5$$

$$\text{Mà } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$\text{TH1: } y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{TH2: } y = 1 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 4 = 0 \text{ (loại vì phương trình trên không có nghiệm nguyên)}$$

$$\text{TH3: } y = 2 \Rightarrow 3x^2 - 13x - 2 = 0 \text{ (loại vì phương trình trên không có nghiệm nguyên)}$$

$$\text{TH4: } y = 3 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 6 = 0 \text{ (loại vì phương trình trên nghiệm nguyên)}$$

$$\text{TH5: } y = 4 \Rightarrow 3x^2 - 19x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{TH6: } y = 5 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 40 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm nguyên là: } (x; y) = \{(0; 0); (4; 5); (5; 4)\}$$

Nhận xét:

a) Một bài toán khá đơn giản rút gọn biểu thức. Tuy nhiên ở tính giá trị biểu thức P , mặc dù điều kiện xác định là $x > 2$ nhưng đề lại yêu cầu tính giá trị của P tại $x = 2$ (có lẽ đây là một chút nhầm lẫn của người ra đề).

b) Nếu dùng các biến đổi đại số thông thường thì khó mà giải quyết được bài toán này. Do đó, ta chuyển phương trình trên thành phương trình bậc theo ẩn x , tham số y . Dựa vào giá trị của Δ thì ta có thể chặn được giá trị của y (hoặc x)

Câu 2 (5,0 điểm).

$$\text{a) Giải phương trình } \sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0.$$

b) Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8A và 8B có tất cả 62 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8B tính số người quen ở lớp 8A và thấy rằng: bạn thứ nhất lớp 8B quen 13 bạn ở lớp 8A, bạn thứ hai lớp 8B quen 14 bạn ở lớp 8A, bạn thứ ba lớp 8B quen 15 bạn ở lớp 8A và cứ như vậy đến bạn cuối cùng của lớp 8B quen tất cả các bạn của lớp 8A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

Lời giải

$$\text{a) ĐKXD: } x \geq \frac{1}{2}. \text{ Ta có:}$$

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{2x-1} = (x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x + \sqrt{2x-1}} = (x-1)^2$$

$$\text{TH1: } (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{TH2: } x \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2x-1} = 1 \text{ (} x \leq 1 \text{)} \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \text{ chỉ thấy } x = 2 - \sqrt{2} \text{ là nghiệm của phương trình.}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: } x = 1; x = 2 - \sqrt{2}$$

b) Gọi số học sinh lớp 8B là n . Ta thấy người thứ nhất quen 13 người, người thứ hai quen 14 người, người thứ ba quen 15 người và cứ như vậy nên ta rút ra được quy luật: Người thứ i sẽ

quen với $i+12$ người. Vì lớp 8B có n người nên người thứ n sẽ quen với cả lớp A là $n+12$ người. Ta lập được phương trình: $n+n+12=62 \Leftrightarrow n=25$. Vậy lớp 8B có 25 học sinh

Nhận xét:

a) – Đây là phương pháp giải phương trình bằng cách liên hợp, mấu chốt để thực hiện phương pháp này là việc ta nhận được nghiệm $x=1$

– Ngoài ra, vì cấu trúc của phương trình này khá đơn giản nên việc xử lý phương trình thứ 3 sau khi liên hợp là tương đối nhẹ nhàng (nếu phương trình có các biểu thức tã hơn thì việc xử lý sẽ khó hơn, đòi hỏi kỹ thuật cao hơn).

b) Một bài toán khá lạ nhưng không quá khó, điều quan trọng ở đây là nhìn ra được quy luật (người thứ i sẽ quen với $i+12$ người khác), từ đó dễ dàng giải quyết được bài toán.

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho đường tròn $(I; R)$ nội tiếp tam giác ABC , biết tam giác ABC cân tại A và $BAC = 120^\circ, AB = 2(2 + \sqrt{3})$. Đường tròn $(I; R)$ tiếp xúc các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E .

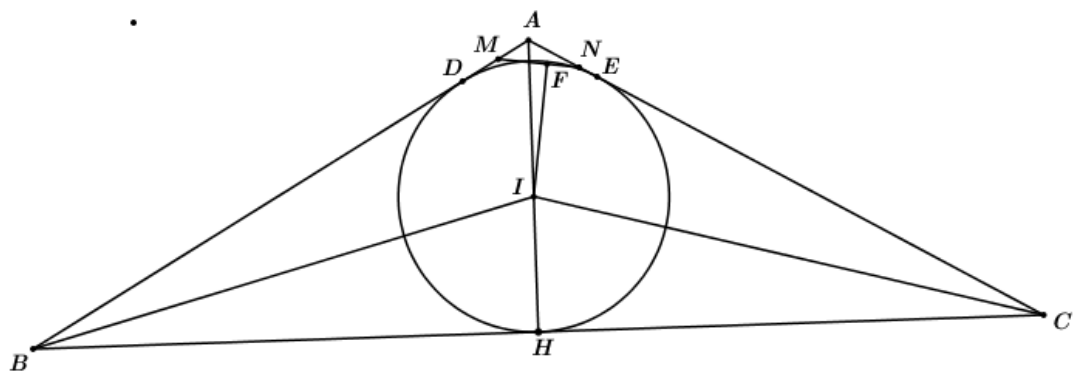
Một tiếp tuyến của đường tròn tại điểm bất kì thuộc cung nhỏ DE cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M và N

a) Chứng minh rằng $MN^2 = AM^2 + AN^2 + AM \cdot AN$

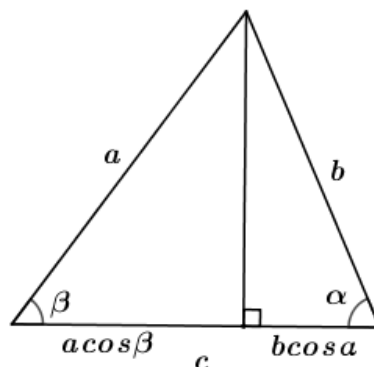
b) Tính bán kính R của đường tròn $(I; R)$

c) Chứng minh rằng $\frac{2}{3} < MN < 1$

Lời giải



a) Ta sẽ chứng minh định lý Cosin:



Hạ đường cao tương ứng với cạnh c . Ta có:

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$$

Lưu ý: Công thức trên vẫn đúng nếu α hoặc β là góc tù, khi đó đường cao ngoài tam giác và $\cos \alpha$ hoặc $\cos \beta$ mang dấu âm.

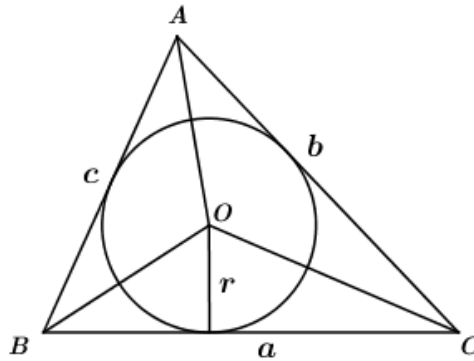
Tương tự ta có: $\Leftrightarrow c^2 = ac \cdot \cos \beta + bc \cdot \cos \alpha$

$$a^2 = ac \cdot \cos \beta + bc \cdot \cos \gamma$$

$$b^2 = bc \cdot \cos \alpha + ab \cdot \cos \gamma$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos \gamma$$

b) Áp dụng định lí Cosin, thu được: $BC^2 = 3AB^2$



Ta chứng minh: $S = pr$ (p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp).

Thật vậy, với O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có:

$$S_{OAC} = \frac{1}{2}r \cdot b; S_{OBC} = \frac{1}{2}r \cdot a; S_{OAB} = \frac{1}{2}r \cdot c$$

$$\Rightarrow S = pr$$

Kẻ đường cao BK . Lại có:

$$S = \frac{BK \cdot AC}{2}$$

Mà $BK = AB \cdot \sin A$

$$\Rightarrow S = \frac{AB^2}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4}$$

Áp dụng vào bài ta có: $S = pr = r \frac{AB + BC + CA}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} = r \frac{2AB + BC}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}AB}{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

c) Ta có: $P_{AMN} = AM + AN + MN = AM + AN + MD + NE = AD + AE = 2AD$

Mà $P_{AMN} = AM + AN + MN < 3MN$

$$\Rightarrow MN > \frac{2AD}{3}$$

Lại có: $AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = 1$

$$\Rightarrow MN > \frac{3}{2}$$

Ta có: $MN < AM + AN = P_{AMN} - MN$

$$\Rightarrow 2MN < P_{AMN} = 2 \cdot AD = 2$$

$$\Rightarrow MN < 1$$

Vậy ta đã chứng minh được: $\frac{3}{2} < MN < 1$

Nhận xét:

- Về tổng quan, câu hình năm nay (cũng như năm ngoái) không quá nặng về mặt ý tưởng, tuy nhiên để có thể xử lý dễ dàng câu a, b thì ta phải chứng minh một kết quả khác (định lý Cosin), Nếu không thì sẽ mất quá nhiều thời gian để xử lý
- Ngoài ra, tuy ý tưởng không phức tạp nhưng ta lại cần phải nắm vững các tính chất cơ bản của tam giác (bất đẳng thức tam giác, tính chất giữa góc và cạnh đối diện...)

Câu 4 (1,0 điểm).

Trong hộp có chứa 2024 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bi màu đỏ, 675 viên bi màu xanh, 675 viên bi màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bi vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bi bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Lời giải

- Khi lấy 123 viên bi bất kì: Ta có thể lấy ít nhất $123 - 17 = 106$ viên bao gồm 3 màu đỏ, xanh, tím
- Với 106 viên bi gồm 3 màu đỏ, xanh, tím, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất $[106/3] + 1 = 36$ viên bi cùng 1 màu. Nếu lấy 122 viên bi bất kì, ta lấy được ít nhất 105 viên bi gồm 3 màu đỏ xanh tím. Ta có 1 cách lấy sao cho không có 36 viên bi nào có cùng màu (35 viên bi đỏ, 35 viên bi xanh, 35 viên bi tím).

Nhận xét:

- Một câu hỏi về tổ hợp khá cơ bản, dựa vào nguyên lý Dirichlet: “Nếu nhốt n con thỏ vào m cái chuồng thì sẽ tồn tại 1 chuồng chứa ít nhất $[n/m] + 1$ con thỏ ($[x]$ ở đây là phần nguyên của số x).
- Dựa vào giả thuyết của đề, không khó để thí sinh tạo được các “chuồng” và “thỏ” để giải quyết bài toán

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ$. Chứng minh rằng $\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \geq \frac{2BC^2}{AB \cdot AC}$$

$$\text{Lại có: } (AB - AC)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \geq AB \cdot AC$$

$$BC^2 \geq AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \geq 2$$

Nhận xét:

- Một câu bất đẳng thức hình học, việc xử lí khá đơn giản nếu ta sử dụng định lí cosin.

Câu 6 (2,0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 25\sqrt{3x^2 - 3x^4} + 2\sqrt{4x^2 + 9x^4}$ (với $x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1$)

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 25\sqrt{3x^2 - 3x^4} + 2\sqrt{4x^2 + 9x^4}$$

$$\Rightarrow A^2 = 1891x^2 - 1839x^4 + 100\sqrt{(3x^2 - 3x^4)(4x^2 + 9x^4)}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } A^2 \leq 26^2$$

Thật vậy:

$$A^2 = 1891x^2 - 1839x^4 + \frac{300}{8} \sqrt{\left(\frac{64}{3}x^2 - \frac{64}{3}x^4\right)(4x^2 + 9x^4)}$$

$$\leq 1891x^2 - 1839x^4 + \frac{150}{8} \left(\frac{76}{3}x^2 - \frac{37}{3}x^4 \right)$$

$$= 2366x^2 - \frac{8281}{4}x^4$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } 2366x^2 - \frac{8281}{4}x^4 \leq 676$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8281}{4} \left(x^2 - \frac{4}{7} \right)^2 \leq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \text{)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: } x = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Nhận xét:

- Đây là bài toán cuối của đề thi (và có lẽ là bài toán khó nhất). Về kỹ thuật cũng như ý tưởng để giải quyết thì không quá khó nhưng việc tìm được điểm rơi $\left(x = \frac{2}{\sqrt{7}} \right)$ thì thật sự rất thử thách đối

với các bạn học sinh khi ở trong không khí phòng thi và không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Lời giải này có lẽ cũng khó mà thực hiện được nếu không có sự giúp đỡ của máy tính.

❧ HẾT ❧