

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để $A = 3$

Câu II. (2,0 điểm)

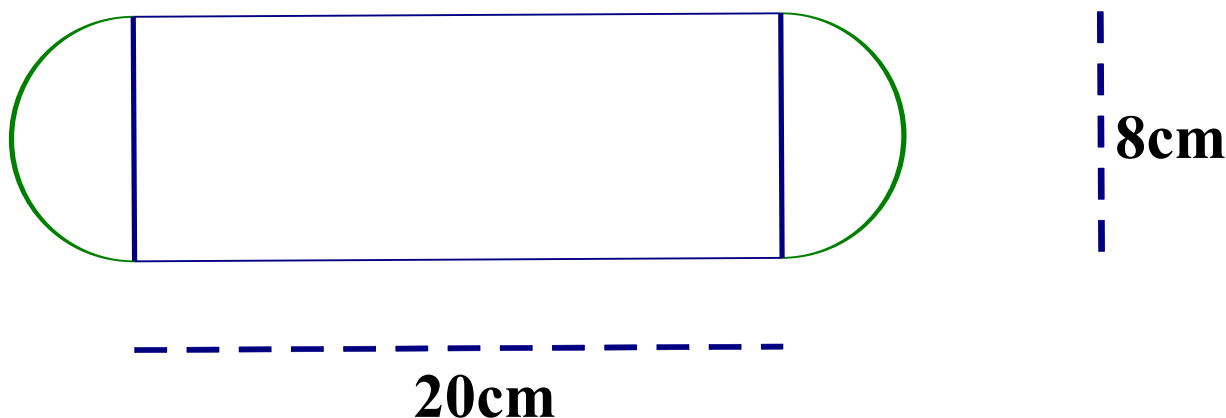
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+1)x - m + 5$. Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $x_1; x_2$ là các số nguyên
- Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0$

Câu III. (2,0 điểm)

- Giải phương trình : $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1$
- Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2x + 4y - 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases}$

Câu IV. (3,0 điểm)

- Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC
 - Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, từ đó suy ra $KF \cdot KE = KB \cdot KC$
 - Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng
- Một chi tiết máy gồm hai nửa hình cầu bằng nhau và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của chi tiết máy đó theo các kích thước cho trên hình vẽ



Câu V. (3 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy + 2yz + 3xz = 24$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+16}}$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot (\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

d) Tìm giá trị của x để A=3

$$A=3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}}=3 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(ktm) \\ x=4(tm) \end{cases}$$

Vậy $x=4$ thì $A=3$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

(d): $y = (m+1)x - m + 5$. Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $x_1; x_2$ là các số nguyên

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = (m+1)x - m + 5 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 5 = 0(*)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m+1)^2 - 4(m-5) = (m-1)^2 + 20 > 0$$

Nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = m-5 \end{cases} \text{ . Xét } x=1 \text{ không phải là nghiệm của phương trình}$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{x-1} = m(1)$$

Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ nên $m+1; m-5$ là các số nguyên do đó m cũng là số nguyên

$$\text{Từ (1) ta có } m \in \mathbb{Z} \text{ khi } \left(x - \frac{5}{x-1} \right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \in \mathbb{Z} \\ 5:(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=-5 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow m=-3 \\ x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m=5 \\ x-1=5 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow m=5 \\ x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow m=-3 \end{cases}$$

Vậy $m=-3; m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0$

$$\begin{aligned}
& x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 4x + 8x + 8 = 16y^4 + 16y + 4 \\
& \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 3x^2 + 4x + 8) = (4y+2)^2 \\
& \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x + 8) = (4y+2)^2
\end{aligned}$$

Vì $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4y+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $(x+1)^2$ và $(4y+2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $(x^2 - 4x + 8)$ cũng là số chính phương. Đặt $x^2 - 4x + 8 = m(m \in \mathbb{Q}^*)$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4 = m^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 - m^2 = -4 \Leftrightarrow (x-2-m)(x-2+m) = -4(*)$$

Do $x-2-m < x-2+m$ nên :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x-2-m=4 \\ x-2+m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ m=\frac{5}{2} \end{cases} (ktm) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-m=-2 \\ x-2+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ m=2 \end{cases} (tm) \\
& \begin{cases} x-2-m=-1 \\ x-2+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7/2 \\ m=5/2 \end{cases} (ktm)
\end{aligned}$$

$$x = -2 \Rightarrow (4y+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+2=2 \\ 4y+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(-2; 0), (-2; -1)$

Câu III. (2,0 điểm)

3. Giải phương trình : $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1$

ĐK: $1 < x \leq 3$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \\
& \Rightarrow 3x-2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Leftrightarrow 3x-4 = 2\sqrt{(x-1)(3-x)} (*)
\end{aligned}$$

(*) có điều kiện $3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$

$$(*) \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 16 = 4(x-1)(3-x)$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow 13x^2 - 40x + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(tm)x \\ x=\frac{14}{13}(ktm) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $x=2$

4. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2x + 4y - 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2x + 4y - 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2(1 - xy) - 1 \\ x + 2y = 1 - xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + 3xy = 1 \quad (1) \\ x + 2y = 1 - xy \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 3xy - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 - 1^3 - 3xy(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Với $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y$ thay vào (2) ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 1 - y + 2y = 1 - (1 - y)y \Leftrightarrow y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Với $x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$

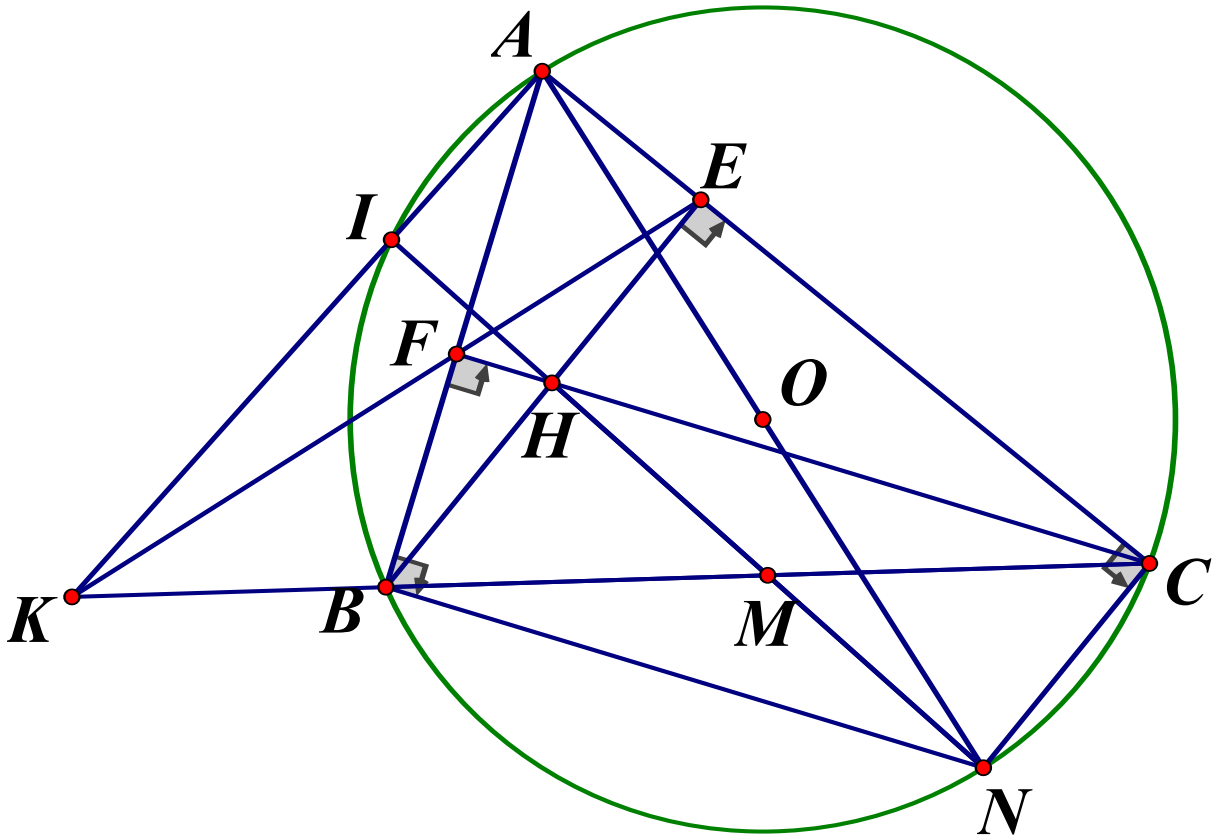
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = -1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1; 0), (2; -1), (-1; -1)$

Câu IV. (3,0 điểm)

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC



a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, từ đó suy ra $KF \cdot KE = KB \cdot KC$

Xét tứ giác $BFEC$ có $\angle BEC = \angle CFB = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp (có 2 góc cùng nhìn 1 cạnh bằng nhau)

Xét $\triangle KEF$ và $\triangle KBE$ có : $\angle K$ chung, $\angle KCF = \angle KEB$ (cùng chắn cung BF)

$$\Rightarrow \triangle KEF \sim \triangle KBE (g.g) \Rightarrow \frac{KF}{KB} = \frac{KE}{KC} \Rightarrow KF \cdot KC = KB \cdot KE (dpcm) (1)$$

b) Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng

Ta có $\triangle KIB \sim \triangle KBA (g.g) \Rightarrow KI \cdot KA = KB \cdot KC (2)$

Từ (1), (2)

$$\Rightarrow KE \cdot KF = KI \cdot KA \Rightarrow \frac{KE}{KI} = \frac{KA}{KF}; \angle K \text{ chung} \Rightarrow \triangle KEA \sim \triangle KIF (c.g.c) \Rightarrow \angle KEA = \angle KIF$$

$\Rightarrow IAEF$ là tứ giác nội tiếp (góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Mặt khác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow I, A, E, F, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \angle IHA = 90^\circ$

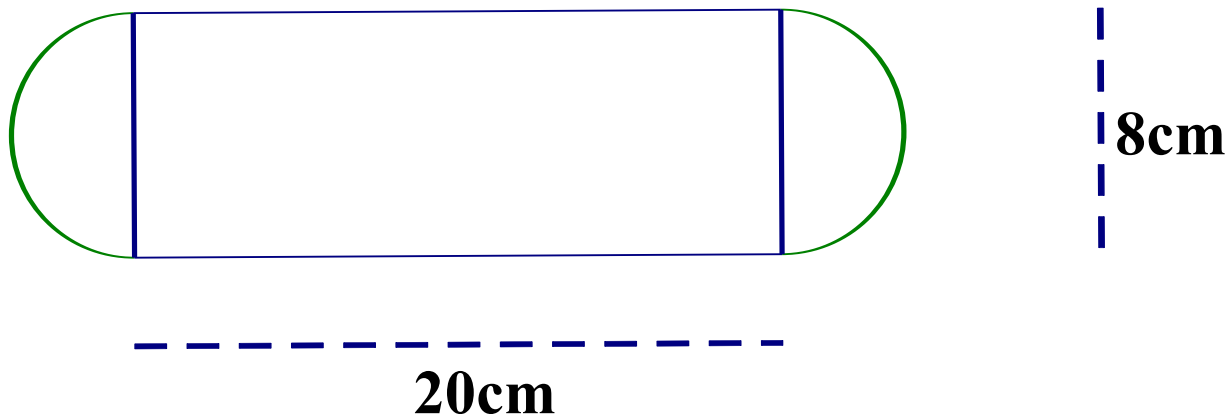
Mà $\angle NIA = 90^\circ$ (góc chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow N, I, H$ thẳng hàng

Kẻ đường kính AN của (O) , $N \in (O)$

Xét tứ giác $BHCN$ có : $BH \parallel CN (\perp AB)$, $CH \parallel BN (\perp AC) \Rightarrow BHCN$ là hình bình hành

Mà M là trung điểm $BC \Rightarrow M \in HN \Rightarrow M, I, H$ thẳng hàng

2. Một chi tiết máy gồm hai nửa cầu bằng nhau và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của chi tiết máy đó theo các kích thước cho trên hình vẽ



$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi + R^2 \pi \cdot 20 = \frac{4}{3} \cdot 4^3 \pi + 20 \cdot 4^2 \pi = \frac{1216}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu V. (3 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy + 2yz + 3xz = 24$. Tìm

giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 9}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 16}}$

$$\text{Ta có : } 4xy + 2yz + 3xz = 24 \Leftrightarrow \frac{xy}{6} = \frac{yz}{12} = \frac{xz}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{4} + \frac{x}{2} \cdot \frac{z}{4} = 1$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = a > 0; \frac{y}{3} = b > 0; \frac{z}{4} = c > 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 1$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 4}} + \frac{3b}{\sqrt{9b^2 + 9}} + \frac{4c}{\sqrt{16c^2 + 16}} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{a^2 + ab + bc + ca}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + ab + bc + ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + ab + bc + ca}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ &= \sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c}} + \sqrt{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{b}{2(b+c)}} + \sqrt{\frac{c}{2(b+c)} \cdot \frac{2c}{a+c}} \end{aligned}$$

Ta có :

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c}}; \quad \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{b}{2(b+c)}}$$

$$\frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2(b+c)} \cdot \frac{2c}{a+c}}$$

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} + \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} + \frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} \right)$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2(a+b)}{a+b} + \frac{2(a+c)}{a+c} + \frac{b+c}{2(b+c)} \right] \Rightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(2+2+\frac{1}{2} \right) \Rightarrow P \leq \frac{9}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{2a}{a+b} = \frac{2a}{a+c} \\ \frac{2b}{a+b} = \frac{b}{2(b+c)} \\ \frac{c}{2(b+c)} = \frac{2c}{a+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=7b \\ a=7c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{\sqrt{15}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{15}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases} \Leftrightarrow x = z = \frac{4}{\sqrt{15}}; y = \frac{3}{\sqrt{15}}$$

Vậy $\text{Max } P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = z = \frac{4}{\sqrt{15}}; y = \frac{3}{\sqrt{15}}$