

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề này có 01 trang, gồm 04 câu)

**KỶ THI LẬP CÁC ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2022-2023
MÔN: TOÁN**

Ngày thi thứ nhất: **20/09/2022**
Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 + 2\sqrt[3]{abc}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Câu 2: (5,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) f tăng ngặt.

ii) $f(f(x) + y) = f(x) + f(y) + 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 3: (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Lấy X là điểm nằm bên trong tam giác sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với BC tại D ; đường tròn này tiếp xúc với CX và BX lần lượt tại Y và Z . Chứng minh rằng tứ giác $EFZY$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 4: (5,0 điểm).

Ban tổ chức cuộc thi giải toán trên báo Toán học và tuổi trẻ lập phương án trao giải thưởng cho cuộc thi. Có ba loại giải: giải nhất, giải nhì và giải ba; trong đó, mỗi giải nhất được 5 “huy hiệu Toán”, mỗi giải nhì được 3 “huy hiệu Toán” và mỗi giải ba được 1 “huy hiệu Toán”. Hỏi ban tổ chức có bao nhiêu phương án trao giải, sao cho mỗi phương án thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Có đủ ba loại giải;

ii) Số lượng giải nhất nhân ba vẫn ít hơn số lượng giải nhì;

iii) Số lượng giải nhì nhân hai vẫn ít hơn số lượng giải ba;

iv) Tổng số “huy hiệu Toán” được trao là 2022 cái.

-----**HẾT**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:.....Số báo danh:.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề này có 01 trang, gồm 04 câu)

**KỶ THI LẬP CÁC ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2022-2023
MÔN: TOÁN**

Ngày thi thứ hai: **21/09/2022**
Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{4\sqrt{u_n}}{n^2 + (n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 2: (5,0 điểm).

Cho đa thức $P(x) = x^2 + 2x + 3$. Xác định tất cả các đa thức $Q(x)$ bậc bốn và có hệ số cao nhất bằng 1 sao cho $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

Câu 3: (5,0 điểm).

Cho tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; 19\}$. Xét các tập hợp $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\} \subset M$ thỏa mãn: với mọi $b \in M$, tồn tại $a_i, a_j \in A$ sao cho $b = a_i$ hoặc $b = 2a_i$ hoặc $b = a_i \pm a_j$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

Câu 4: (5,0 điểm).

Cho lục giác $ABCDEF$ có độ dài các cạnh đều bằng 3. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \geq \frac{1}{2}.$$
 Đẳng thức xảy ra khi nào?

-----**HẾT**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:.....Số báo danh:.....