

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 - 2023

MÔN: TOÁN

Ngày thi: 20/9/2022

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 04 bài, trong 01 trang

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ và $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = 12$, với mọi n nguyên dương.

1. Xác định công thức tổng quát của dãy (a_n) .
2. Tính giới hạn (nếu có) của dãy số $(b_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$.

Bài 2 (5,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.
2. Chứng minh $f(x)$ là đơn ánh và là hàm số lẻ.
3. Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AC, AB tại E, F tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi M là giao điểm của BE và CF ; S là giao điểm của BC và EF ; D và N lần lượt là giao điểm của AM với BC và (O) ($N \neq A$).

1. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại P . Chứng minh T, N, P thẳng hàng.
2. Gọi K là giao điểm của AB và CN . Chứng minh K nằm trên đường thẳng SP , từ đó chỉ ra D là trực tâm giác OSP .

Bài 4 (5,0 điểm).

1. Cho p là số nguyên tố khác 3 và số nguyên a sao cho $p \mid (a^2 + a + 1)$. Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{3}$.
2. Cho số nguyên dương m lớn hơn 1 sao cho m không có ước nguyên tố dạng $3t + 1$, $t \in \mathbb{N}$. Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho $1 + am^3$ là lập phương của một số nguyên và $1 + an^3$ không là lập phương của một số nguyên với mọi số nguyên dương $n < m$.

————HẾT————

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Họ và tên, chữ kí của CBCT 1:

Họ và tên, chữ kí của CBCT 2: