

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right)$ với

$x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị x nguyên để A nhận giá trị nguyên

Câu 2. (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$$
- Giải phương trình : $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$

Câu 3. (2,0 điểm)

- Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là D . Kẻ DM vuông góc với AB tại M

- Chứng minh tứ giác $BMHD$ nội tiếp được đường tròn và DA là tia phân giác của góc $\angle MDC$
- Từ D kẻ DN vuông góc với đường thẳng AC tại N . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng
- Cho $P = AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2$, tính giá trị biểu thức P theo R

Câu 5. (1,0 điểm)

- Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$

Tính $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$

- Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right)$ với

$$x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right) \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-2) + x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}-4+x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{x-1} \\ &= \frac{(x+2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

d) Tìm các giá trị x nguyên để A nhận giá trị nguyên

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\sqrt{x}-1 = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ (không thỏa)}$$

$$\sqrt{x}-1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa)}$$

$$\sqrt{x}-1 = 3 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa)}$$

$$\sqrt{x}-1 = 1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa)}$$

Vậy $x = 0, x = 16$ thì A nguyên

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y-2x-1=0 \\ 4x^2-3xy+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x-1=0 \\ 4x^2-3xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 4x^2-3x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases} \quad (1)$$

Thay $y = 2x+1$ vào phương trình (1) ta được hệ :

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ 4x^2-3x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ (0; 1); \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \right\}$

d) Giải phương trình : $x^2+2x+7=3\sqrt{(x^2+1)(x+3)}$

Điều kiện: $x \geq -3$

Ta có : $x^2+2x+7 = (x^2+1) + 2(x+3)$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 1} (a > 0); b = \sqrt{x + 3} (b \geq 0)$. Ta có phương trình :

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a - b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x + 3} \\ \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} (tm)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{15} (tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; -1; 2 \pm \sqrt{15}\}$

Câu 3. (2,0 điểm)

c) **Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) với trục hoành $\Rightarrow y = 0, x = 2$

Vậy $(d_1): y = -x + 2$ cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$

Để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành thì (d_2) phải đi qua điểm $A(2; 0)$

$$\Rightarrow 0 = 4 + 3 - k \Leftrightarrow k = 7$$

Vậy $k = 7$

d) **Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng**

$(d): y = 2mx - m + 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d)

cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } \Delta' = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } m$$

Nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Do đó đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

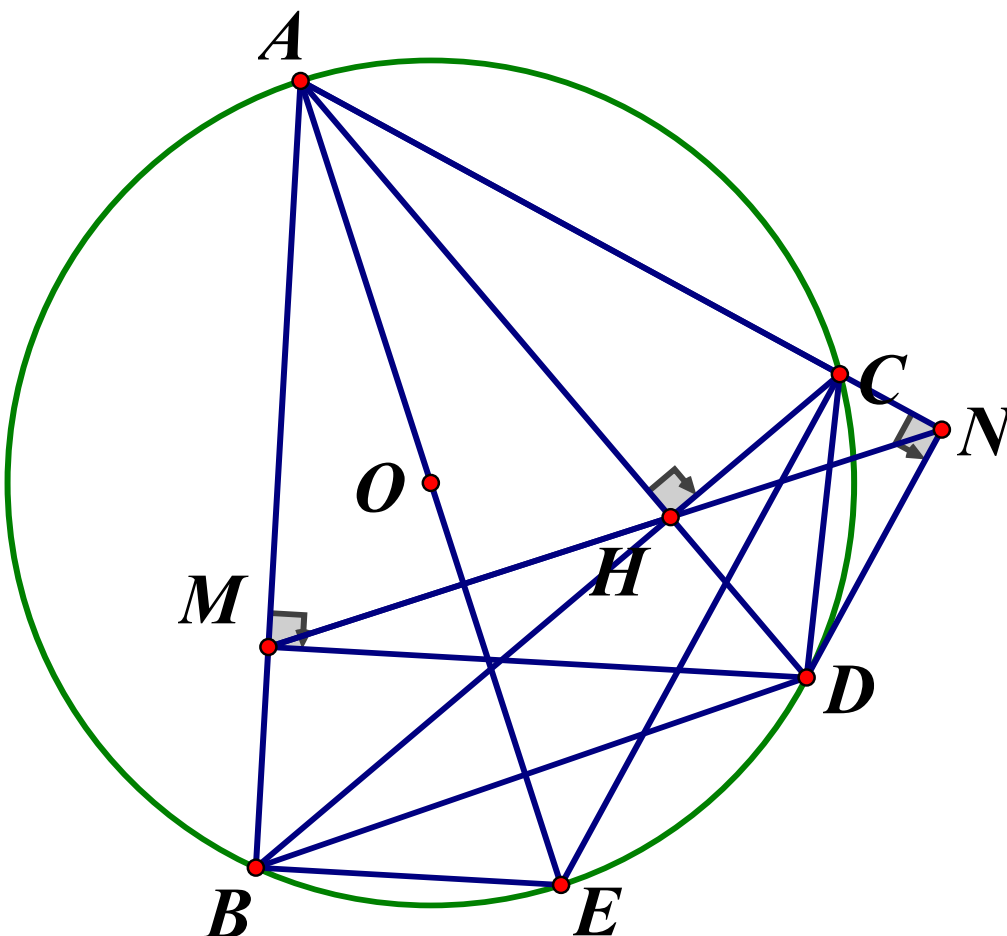
Áp dụng định lý Vi-ét ta được : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Ta có :

$$|x_1 - x_2| > \sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

Vậy $m \neq \frac{1}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là D . Kẻ DM vuông góc với AB tại M



d) Chứng minh tứ giác $BMHD$ nội tiếp được đường tròn và DA là tia phân giác của góc $\angle MDC$

Ta có : $AD \perp BC, DM \perp AB(gt) \Rightarrow \angle DHB = \angle DMB = 90^\circ$, mà 2 đỉnh M, H kề nhau cùng nhìn BD dưới 1 góc bằng nhau nên $BMHD$ là tứ giác nội tiếp

Vì tứ giác $BMHD$ nội tiếp nên $\angle MDH = \angle MBH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MH). Hay $\angle MDA = \angle ABC$

Lại có $\angle ADC = \angle ABC$ (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \angle MDA = \angle ADC$ hay DA là tia phân giác của $\angle MDC$

e) Từ D kẻ DN vuông góc với đường thẳng AC tại N . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng

Chứng minh tương tự câu a ta có tứ giác $DHCN$ nội tiếp $\Rightarrow \angle DHN = \angle DCN$

Mà $\angle DCN = \angle ABD$ (vì $ABDC$ là tứ giác nội tiếp)

Tứ giác $BDHM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ABD + \angle DHM = 180^\circ$

Suy ra $\angle DHN + \angle DHM = 180^\circ$. Do đó ba điểm M, H, N thẳng hàng

f) Cho $P = AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2$, tính giá trị biểu thức P theo R

Kẻ đường kính AE

Ta có $\angle AEB = \angle ACB \Rightarrow \angle BAE = \angle DAC \Rightarrow sd \overline{BE} = sd \overline{CD} \Rightarrow BE = CD$

Tương tự $EC = BD$

Áp dụng định lý Pytago ta có

$$P = AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2 = AB^2 + BE^2 + AC^2 + CE^2 = AE^2 + AE^2$$

$$P = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2$$

Câu 5. (1,0 điểm)

c) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$

Tính $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$

Ta có : $2 = xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + Q \Leftrightarrow 2 - Q = xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

$$\Rightarrow (2 - Q)^2 = \left(xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}\right)^2$$

$$4 - 4Q + Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có :

$$Q^2 = \left(x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}\right)^2 = x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

$$Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } 4 - 4Q = 1 \Leftrightarrow Q = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{3}{4}$$

d) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$

Đặt $a = x + y (a > 0)$. Áp dụng bất Cosi ta có :

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}, \text{ ta có: } 4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y = 4(x + y)^2 + 9xy + 5(x + y)$$

$$1 \leq 4(x + y)^2 + 9xy + 5(x + y) \leq 4(x + y)^2 + \frac{9}{4}(x + y)^2 + 5(x + y)$$

Thay $a = x + y$ ta có :

$$1 \leq 4a^2 + 5a + \frac{9}{4}a^2 \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{5}{2}a + 1\right)^2$$

$$a = (x + y) \geq 0. \text{ Từ đó, ta có } a \geq \frac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow P = 17x^2 + 17y^2 + 6xy = 17a^2 - 18xy \geq 17a^2 - \frac{9}{2}a^2 \geq 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y = \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$$

$$\text{Vậy } \min P = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$$