

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Cho $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tìm x để A là số nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình ẩn x , tham số m :

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Câu 3 (4,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Đường tròn $(B; BA)$ cắt đường tròn $(C; CA)$ tại điểm thứ hai là D . Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với $E \in (B; BA), F \in (C; CA)$, biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC .

- a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$.
b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại $(B; BA), (C; CA)$ lần lượt tại L, K khác A . Chứng minh rằng $BL \parallel AC$ và $SD^2 = SL \cdot SK$.
c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC . Chứng minh rằng $\widehat{XAY} = 90^\circ$.

Câu 5 (2,0 điểm).

- a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

- b) Cho số tự nhiên $n \geq 0$ và cho trước $7n+1$ đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có $n+1$ đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị số 1: Chữ kí giám thị số 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 9 THCS

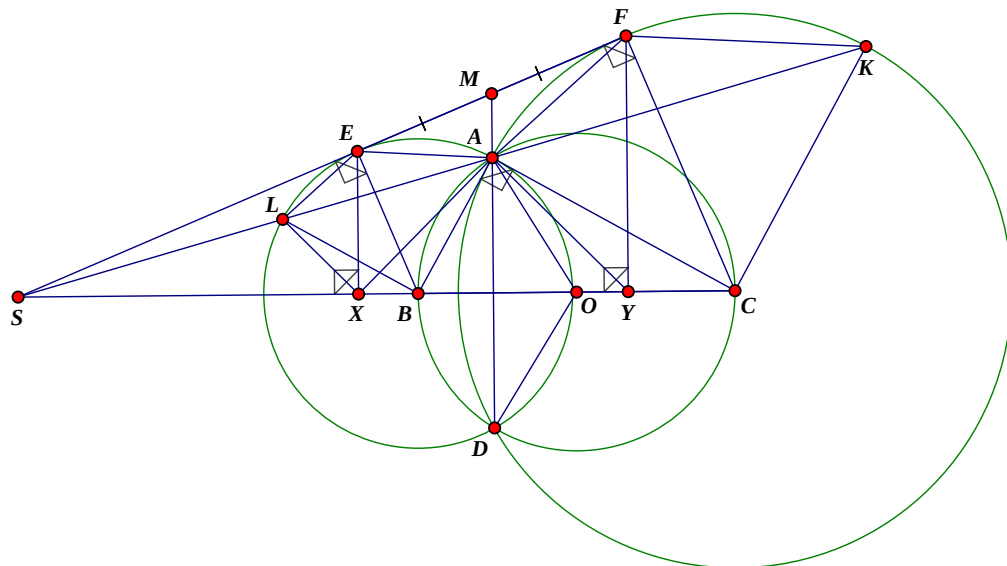
(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Hướng dẫn chung:

- Nếu thí sinh làm theo phương pháp khác mà vẫn đúng kết quả và chính xác về nội dung thì vẫn cho tối đa số điểm.
- Thí sinh làm đúng đến đâu tính điểm đến đó theo đáp án.
- Điểm của toàn bài là tổng các điểm thành phần làm tròn đến 0,25.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 đ)	Cho $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với $x > 0, x \neq 1$. a) Rút gọn biểu thức A . b) Tìm x để A là số nguyên.	
	Lời giải a/ $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ $= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ $= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{3x}{\sqrt{x}-1}$	1,0
	$= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3x}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{3x(x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$	1,0
	b/ Chú ý rằng $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} < 3 \Leftrightarrow 3x < 3x+3\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 0 < 3\sqrt{x}+3$ (luôn đúng). Do đó, $0 < \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} < 3$ với mọi $x > 0$.	1,0
	Vậy $A = \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ là số nguyên thì chỉ có thể có các trường hợp sau đây TH1: $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 3x = x+\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{-1}{2}(L) \end{cases} \Leftrightarrow x=1$	1,0

	TH2: $\frac{3x}{x+\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow 3x = 2x + 2\sqrt{x+1} + 2 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x+1} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{3} < 0(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{3})^2$. Vậy, các giá trị cần tìm là $x = 1$ hoặc $x = (1 + \sqrt{3})^2$	
Câu 2 (4,0 đ)	$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.	1,0
	Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.	1,0
	Theo giả thiết: $x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3m^2 + 16$ $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - (m^2 + 4) \leq 3m^2 + 16$ $\Leftrightarrow 8m \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2$.	1,0
	Vậy $\frac{3}{2} < m \leq 2$.	1,0
Câu 3 (4,0 đ)	$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 & (1) \\ (x+y-5)^2 = 0 & (2) \end{cases}$	1,0
	Từ (1) suy ra $x - y = -1$ hoặc $x - y = -2$ Từ (2) suy ra $x + y = 5$	1,0
	Với $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$	1,0
	Với $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$	1,0
Câu 4 (6,0 đ)	Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Đường tròn $(B; BA)$ cắt đường tròn $(C; CA)$ tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với $E \in (B; BA), F \in (C; CA)$, biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC. a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$. b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại $(B; BA), (C; CA)$ lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng $BL \parallel AC$ và $SD^2 = SL \cdot SK$. c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\widehat{XAY} = 90^\circ$.	
	a/ Vì ME là tiếp tuyến của $(B; BA)$ nên theo tính chất tiếp tuyến thì $ME^2 = MA \cdot MD$. Tương tự thì $MF^2 = MA \cdot MD$. Do đó ta được $ME^2 = MF^2 \Rightarrow ME = MF$.	1,0



Ta có $\widehat{EDA} = \widehat{FEA}$ và $\widehat{FDA} = \widehat{EFA}$ (góc tiếp tuyến và dây cung).

Do đó, $\widehat{EDF} = \widehat{EDA} + \widehat{FDA} = \widehat{FEA} + \widehat{EFA} = 180^\circ - \widehat{EAF}$ suy ra $\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$.

b/ Vì $BE \parallel CF$ nên theo Thales thì $\frac{SB}{SC} = \frac{BE}{CF} = \frac{SE}{SF}$ (1).

Chú ý $BE = BL$; $CF = CA$ nên suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{BL}{CA}$, vậy ta thu được $BL \parallel CA$ (Thales đảo).

Chứng minh tương tự thì $CK \parallel BA$.

Do đó, theo định lí Thales thì $\frac{SL}{SA} = \frac{SB}{SC} = \frac{SA}{SK} \Rightarrow SA^2 = SL.SK$.

Dễ thấy BC là trung trực của AD nên $SD = SA$. Do đó, $SD^2 = SL.SK$.

c/ Theo hệ thức lượng tam giác SEB thì $SX.SB = SE^2$.

Theo tính chất tiếp tuyến thì $SE^2 = SL.SA$.

Do đó, $SX.SB = SL.SA$ suy ra $XBAL$ nội tiếp nên $\widehat{XAB} = \widehat{XLB}$ (2).

Vì $EX \parallel FY$ nên $\frac{SX}{SY} = \frac{SE}{SF}$ (3), vì $BL \parallel CA$ nên $\frac{SL}{SA} = \frac{SB}{SC}$ (4).

Từ (1), (3) và (4) suy ra $\frac{SX}{SY} = \frac{SL}{SA}$ nên $XL \parallel AY$. Do đó, từ $BL \parallel CA$ và $XL \parallel AY$ suy ra

$\widehat{XLB} = \widehat{YAC}$ (góc có cạnh tương ứng song song) (5).

Từ (2) và (5) suy ra $\widehat{XAB} = \widehat{YAC}$ tức là $\widehat{XAY} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Câu 5
(2,0 đ)

a/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

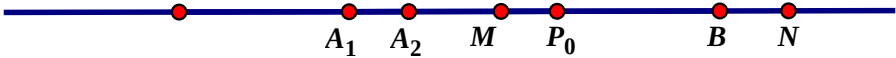
$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}(x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng BDT Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}, \text{ có dấu bằng khi } y = 2x$$

	$\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}, \text{ có dấu bằng khi } z = 4x$ $\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1, \text{ có dấu bằng khi } z = 2y$ Vậy $P \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{21}{16} \right)$ Suy ra $\min P = \frac{49}{48}$, khi $x = \frac{3}{7}; y = \frac{6}{7}; z = \frac{12}{7}$	
	b/ Cho số tự nhiên $n \geq 0$ và cho trước $7n+1$ đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có $n+1$ đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung. Lời giải: Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp Bước 1: Với $n = 0$ thì đề bài cho 1 đoạn thẳng, hiển nhiên là đúng. Bước 2: Giả sử bài toán đúng cho $n-1$. Bước 3: Xét bài toán với n Ta gọi I_0 là đoạn thẳng có đầu mút bên trái P_0 là điểm xa nhất về bên phải so với tất cả các đoạn thẳng còn lại (cụ thể với hai đoạn MN, P_0B thì hai điểm bên trái là M, P_0 thì P_0 xa nhất phía bên phải).  Để thấy, mọi đoạn thẳng có giao với I_0 đều phải chứa P_0.	0,5
	TH1: Nếu ít nhất 7 đoạn có giao điểm với I_0 thì 7 đoạn này cùng với I_0 có điểm chung là P_0. TH2: Nếu không xảy ra TH 1, thì ít nhất có $7(n-1)+1$ đoạn thẳng không cắt I_0. + Nếu có 8 đoạn trong chúng có điểm chung thì bài toán được giải quyết. + Nếu ngược lại thì theo giả thiết quy nạp sẽ có ít nhất n đoạn trong chúng phân biệt từng đôi một, thêm vào đoạn I_0 thì được $n+1$ đoạn phân biệt từng đôi một. Vậy trong cả hai trường hợp thì bài toán đều đúng, tức là quy nạp được thực hiện.	0,5
Tổng điểm toàn bài		20

-----Hết-----