

ĐÁP ÁN-TOÁN
Ngày thi: 5/10/2022

Bài 1. (5.0 điểm) Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên sao cho phương trình $P(x) = 3^n$ có nghiệm nguyên dương với mọi số nguyên dương n .

Nhận xét : Nếu $P(x) = a_0 \in \mathbb{Z}$ là không thỏa mãn.

Đặt $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_m \neq 0$.

Vì $3^n \rightarrow +\infty$ nên $a_m \geq 1$ từ đó suy ra hàm $P(x)$ đồng biến trên $(a; +\infty)$ với a đủ lớn. Gọi (x_n) là dãy nghiệm của phương trình $P(x) = 3^n$ thì dãy (x_n) tăng kể từ một chỉ số n_1 nào đó và $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Ta có } \lim \frac{x_n^m}{3^n} = \lim \frac{x_n^m}{P(x_n)} = \lim \frac{x_n^m}{a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \dots + a_1 x_n + a_0} = \frac{1}{a_m}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \lim \frac{x_{n+1}^m / 3^{n+1}}{x_n^m / 3^n} = 1 \Rightarrow \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 3^{\frac{1}{m}}.$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = 3^{\frac{1}{m}} + 3^{-\frac{1}{m}} > 2 \text{ (theo AM- GM và dấu đẳng thức không xảy ra)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1} \text{ kể từ } n_2 \text{ nào đó.}$$

$$\text{Mặt khác do } P(x) \in \mathbb{Z}[X] \Rightarrow x_{n+1} - x_n \mid P(x_{n+1}) - P(x_n) = 2 \cdot 3^n$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1} - x_n \geq \frac{3}{2}(x_n - x_{n-1}) \geq \dots \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_2} (x_{n_2+1} - x_{n_2}) \Rightarrow x_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_2}, \forall n > n_2.$$

$$\text{Từ đó nếu } m > 3 \Rightarrow \frac{1}{a_m} = \lim \frac{x_{n+1}^m}{3^{n+1}} \geq \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{m(n-n_2)}}{3^{n+1}} = +\infty \text{ (vì } \left(\frac{3}{2}\right)^m > 3 \text{) là vô lí.}$$

Từ đó ta có $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Với $m = 1$,

$$\text{Khi đó } P(x) = a_1 x + a_0 \Rightarrow a_1 \mid a_1 x_n = 3^n - a_0, \forall n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \mid 3 - a_0 \\ a_1 \mid 9 - a_0 \end{cases} \Rightarrow a_1 \mid 6$$

$$\Rightarrow a_1 \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

- Trường hợp 1: $a_1 = 1 \Rightarrow P(x) = x + a_0$. Phương trình $P(x) = 3^n$ có nghiệm $x \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_0 \leq 2, a_0 \in \mathbb{Z}$.
- Trường hợp 2: $a_1 = 2 \Rightarrow P(x) = 2x + a_0$. Phương trình $P(x) = 3^n$ có nghiệm $x \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_0 = 3 - 2k, k \in \mathbb{N}^*$.
- Trường hợp 3: $a_1 = 3 \Rightarrow P(x) = 3x + a_0$. Phương trình $P(x) = 3^n$ có nghiệm $x \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_0 = 3 - 3k, k \in \mathbb{N}^*$.

- Trường hợp 4: $a_1 = 6 \Rightarrow P(x) = 6x + a_0$. Phương trình $P(x) = 3^n$ có nghiệm $x \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_0 = 3 - 6k, k \in \mathbb{N}^*$.

Với $m = 2$, khi đó $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Phương trình $ax^2 + bx + c = 3^n$ có nghiệm nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \Delta_n = b^2 - 4ac + 4 \cdot 3^n$ là số chính phương với mọi n .

Ta có: $\Delta_2 - \Delta_1 = 24 \Rightarrow \Delta_2 \in \{25, 49\}$.

$\Delta_3 - \Delta_2 = 72 \Rightarrow \Delta_3 \in \{97, 121\}$, mà Δ_3 là số chính phương nên $\Delta_3 = 121$.

$\Delta_4 - \Delta_3 = 8 \cdot 3^3 \Rightarrow \Delta_4 = 337$, không là số chính phương.

Vậy trong trường hợp này ta không tìm được đa thức thỏa mãn.

Bài 2. (5.0 điểm)

Cho dãy (a_n) xác định bởi :

$$a_0 = 20; a_1 = 100; a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tìm số nguyên dương h nhỏ nhất thỏa mãn $a_{n+h} - a_n$ chia hết cho 2023 với mọi số tự nhiên n .

Đặt $a_n = b_n + t \Rightarrow b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n + 8t + 20$. Chọn $t = -\frac{5}{2} \Rightarrow b_{n+2} - 4b_{n+1} - 5b_n = 0$

Từ đó sử dụng phương trình đặc trưng suy ra $a_n = \frac{125}{6} \cdot 5^n + \frac{5}{3} \cdot (-1)^n - \frac{5}{2}$.

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $a_{n+h} \equiv a_n \pmod{2023}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $a_1 = 100; a_0 = 20 \Rightarrow h \geq 2$.

Ta sẽ chứng minh h thỏa mãn điều kiện khi và chỉ khi h là số chẵn và $a_{h-1} \equiv 0 \pmod{2023}$.

Điều kiện cần: Ta có $a_h = a_{0+h} \equiv a_0 \equiv 20 \pmod{2023}$

$$a_{h+1} \equiv a_1 = 100 \pmod{2023}$$

$$5a_{h-1} = a_{h+1} - 4a_h - 20 \equiv 0 \pmod{2023} \Rightarrow a_{h-1} \equiv 0 \pmod{2023}$$

Nếu h lẻ thì $h-1$ chẵn và suy ra $a_h = 5a_{h-1} \equiv 0 \pmod{2023} \Rightarrow 20 \equiv 0 \pmod{2023}$ là vô lí. Suy ra h chẵn.

Điều kiện đủ:

Vì h chẵn nên $5a_{h-2} = a_{h-1} \equiv 0 \pmod{2023}$. Từ đó ta có

$$a_h = 4a_{h-1} + 5a_{h-2} + 20 \equiv 20 \equiv a_0 \pmod{2023}.$$

$$a_{h+1} = 4a_h + 5a_{h-1} + 20 \equiv 100 \equiv a_1 \pmod{2023}.$$

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được $a_{n+h} \equiv a_n \pmod{2023}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $h-1$ lẻ nên ta có $a_{h-1} = \frac{25}{6}(5^h - 1) \equiv 0 \pmod{2023} \Leftrightarrow 5^h \equiv 1 \pmod{6 \cdot 7 \cdot 17^2}$. Từ đây

áp dụng định lí Fermat ta có $5^h \equiv 1 \pmod{3}$

$$5^h \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow h:6; 5^h \equiv 1 \pmod{17^2} \Leftrightarrow h:17 \cdot 16$$

Từ đó ta có $h:[6;16 \cdot 17] = 816$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của h là 816.

Bài 3. (5,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + d = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4a + 2ab + 2abc + abcd$.

Đặt $f(a, b, c, d) = 4a + 2ab + 2abc + abcd$. Ta có

$$f(a, b, c, d) - f(b, a, c, d) = 4(a - b).$$

$$f(a, b, c, d) - f(a, c, b, d) = 2a(b - c).$$

$$f(a, b, c, d) - f(a, b, d, c) = 2ab(c - d)$$

Như vậy để $f(a, b, c, d)$ đạt giá trị lớn nhất thì $a \geq b \geq c \geq d$.

Vì $a + b + c + d = 6 \Rightarrow c \leq 2$.

Ta có $f(a, b, c + d, 0) - f(a, b, c, d) = 2ab(c - d) = ab(2 - c)d \geq 0$

Do đó để $f(a, b, c, d)$ đạt giá trị lớn nhất thì $d = 0$

$$\Rightarrow c = 6 - a - b.$$

Khi đó $f(a, b, 6 - a - b, 0) = 4a + 14ab - 2a^2b - 2ab^2$

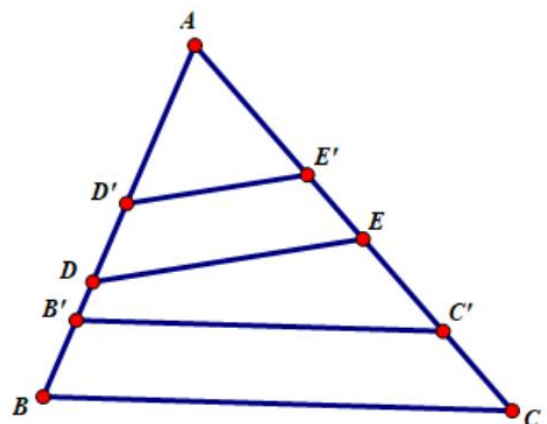
$$= 36 + \frac{(a - 3)^2(a - 8)}{2} - \frac{a}{2}(a + 2b - 7)^2 \leq 36.$$

Như vậy giá trị lớn nhất của P là 36 khi $(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 0)$.

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $A \geq 60^\circ$. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E . Chứng minh rằng

$$\frac{BC}{\min\{BD, DE, EC\}} \geq \sqrt{5 - 4\cos A}.$$



Nếu $BD = \min\{BD, DE, EC\}$. Ta có thể di chuyển đoạn BD về gần điểm A hơn và vẫn giữ nguyên độ dài đoạn BD . Giả sử ta dịch chuyển B đến B' , D đến D' . Kẻ $D'E' \parallel DE, B'C' \parallel BC$. Có $AB' < AB \Rightarrow D'E' < DE$ và $B'C' < BC$. Ta có thể chọn vị trí B', D' phù hợp sao cho $\min\{B'D', D'E', E'C'\} = B'D' = BD$ và hoặc $B'D' = D'E'$ hoặc $B'D' = E'C'$. Khi đó,

$$\frac{BC}{\min\{BD, DE, EC\}} > \frac{B'C'}{\min\{B'D', D'E', E'C'\}}.$$

Nếu $DE = \min\{BD, DE, EC\}$. Ta có thể vẽ $B'C' \parallel BC (B' \in AB, C' \in AC)$ mà $B'D < BD, C'E < CE$. Ta có thể chọn vị trí B', C' phù hợp sao cho $B'D = DE = \min\{B'D, DE, EC'\}$ hoặc $C'E = DE = \min\{B'D, DE, EC'\}$.

Tóm lại, ta có thể giả sử $BD = DE = \min\{BD, DE, EC\}$ hoặc $BD = EC = \min\{BD, DE, EC\}$.

TH1. $BD = EC = \min\{BD, DE, EC\}$. Đặt $u = AD, v = AE, x = BD = CE, y = DE, y \geq x$. ta có

$$\begin{cases} a^2 = (u+x)^2 + (v+x)^2 - 2(u+x)(v+x)\cos A \\ y^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos A \end{cases}.$$

Kết hợp với $u+v \geq y \geq x$, ta được

$$\begin{aligned} a^2 &= y^2 + 2x^2(1 - \cos A) + 2(u+v)x(1 - \cos A) \geq x^2(5 - 4\cos A) \\ &\Rightarrow \frac{a}{x} \geq \sqrt{5 - 4\cos A}, dpcm. \end{aligned}$$

TH2. $BD = DE = \min\{BD, DE, EC\}$

TH2.1 Nếu $C < 90^\circ$, ta có thể chọn C' thuộc đoạn CE sao cho $BD = DE = EC'$ và khi đó, áp dụng TH1, ta được

$$\frac{BC}{\min\{BD, DE, EC\}} > \frac{BC'}{\min\{BD, DE, EC'\}} \geq \sqrt{5 - 4\cos A}.$$

TH2.2 $BD = DE < CE, C \geq 90^\circ$.

Đặt $x = BD, y = EC$. Khoảng cách từ D tới BC là $x \sin B$, khoảng cách từ E tới BC là $y \sin(A+B)$.

Vì $y \sin(A+B) \geq x \sin B \Rightarrow DEA$ không nhọn. Do vậy, $DE \leq DA$ và $x \leq \frac{AB}{2}$ và

$x \leq y \leq AC$. Do đó $\min\{BD, DE, EC\} \leq \min\left\{\frac{c}{2}, b\right\}$. Vậy,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 4b\left(\frac{c}{2}\right)\cos A \\ &\geq 3\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b\left(\frac{c}{2}\right)(2 - 4\cos A) \geq (5 - 4\cos A)\left(\min\{BD, DE, EC\}\right)^2. \end{aligned}$$

--- **HẾT** ---