

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1: (4 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{9}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức A nhận giá trị nguyên

2) Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 9$

Bài 2: (4 điểm)

1) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + b$. Tìm b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OI = \sqrt{\frac{13}{2}}$ (với I là trung điểm của AB).

2) Giải phương trình $(x^2 + 1)(x - 1)(x - 3) = 15(2x - 1)^2$

Bài 3: (4 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$

2) Cho x, y, z là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x - y)(y - z)(z - x)$$

Bài 4: (4 điểm) Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H .

1) Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$

2) Chứng minh DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$

3) Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Chứng minh $2EF + BF = \sqrt{3} \cdot CF$.

Bài 5: (2 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{BCD} = 120^\circ$ tia phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt BD tại E . Tia phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA} = \frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{1}{CF}$$

Bài 6: (2 điểm) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + 2y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1 + 3x^2y^2}{xy}$$

----- Hết -----

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

$$1) A = \frac{9}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{9 + (2\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{9 + 2x + \sqrt{x} - 10 - x + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2) + 2}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$$

Do đó A nhận giá trị nguyên với x nguyên khi $\sqrt{x} - 2 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in \{1; 3; 0; 4\} \Rightarrow x \in \{1; 9; 0; 16\} \text{ (TMĐK)}$$

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m + 3)^2 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 9 > 0 \Leftrightarrow (4m + 1)^2 + 8 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m$$

Theo Vi ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9 \Leftrightarrow (2m + 3)^2 - 2m = 9 \Leftrightarrow m(2m + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 2: (4 điểm)

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0 \quad (*)$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4b > 0 \Leftrightarrow b > -\frac{1}{4}$

Theo Vi ét, ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = 1 \\ x_A x_B = -b \end{cases}$$

Vì I là trung điểm AB , nên có:
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{x_A^2 + x_B^2}{2} = \frac{(x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B}{2} = \frac{1 + 2b}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } OI = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + 2b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2b + 1}{2} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow b^2 + b - 6 = 0 \Leftrightarrow (b + 3)(b - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \text{ (l)} \\ b = 2 \text{ (n)} \end{cases}$$

Vậy $b = 2$

$$2) (x^2 + 1)(x - 1)(x - 3) = 15(2x - 1)^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 56x^2 + 56x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 10x^3 + 6x^2) + (6x^3 - 60x^2 + 36x) - (2x^2 - 20x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 10x + 6) + 6x(x^2 - 10x + 6) - 2(x^2 - 10x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 6)(x^2 + 6x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 6 = 0 \\ x^2 + 6x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{19}; x_2 = 5 + \sqrt{19} \\ x_3 = -3 - \sqrt{11}; x_4 = -3 + \sqrt{11} \end{cases}$$

Bài 3: (4 điểm)

$$1) x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3yx + 2y^2 + 6 = 0 \quad (*)$$

Ta có $\Delta_x = (-3y)^2 - 4(2y^2 + 6) = y^2 - 24$. (*) có nghiệm nguyên dương $\Rightarrow y^2 - 24 = k^2 (k \in \mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow (y-k)(y+k) = 24. \text{ Vì } y \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < y-k \leq y+k$$

Mặt khác $\begin{cases} (y-k)(y+k) = 24 \\ (y-k) + (y+k) = 2y \end{cases} \Rightarrow y-k, y+k \text{ cùng chẵn, nên có các trường hợp sau:}$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y-k = 2 \\ y+k = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x^2 - 21x + 104 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x-13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 13 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y-k = 4 \\ y+k = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x^2 - 15x + 56 = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ cần tìm là: $(8; 7), (13; 7), (7; 5), (8; 5)$

$$2) \text{ Đặt } x-y=a, y-z=b \Rightarrow z-x=-a-b=-(a+b).$$

$$\begin{aligned} \text{Có } (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 &= a^5 + b^5 - (a+b)^5 = a^5 + b^5 - (a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \\ &= -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = -5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2) = 5(x-y)(y-z)(z-x)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Vì x, y, z đôi một khác nhau, nên $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

Vậy $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$

Bài 4: (4 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H.

1) Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$:

$$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ (gt); \widehat{BAE} \text{ (góc chung)}.$$

Vậy $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC \text{ (đpcm)}$$

2) Chứng minh DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$

Tứ giác BDHF có:

$$\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác BDHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ (a)

Tứ giác CDHE có:

$$\widehat{CDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{CDH} + \widehat{CEH} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác CDHE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (b)

Lại có $\triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \widehat{HBF} = \widehat{HCE}$ (c)

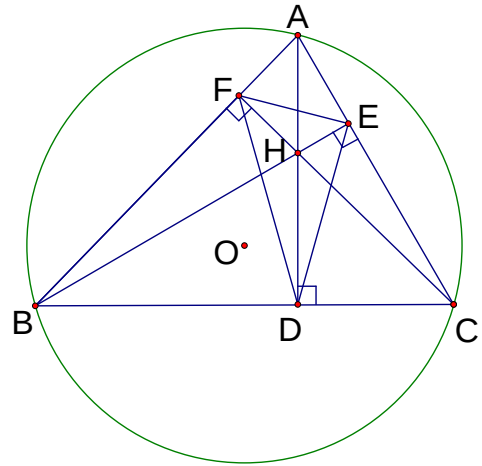
Từ a), b), c) $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HDE}$. Vậy DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$

3) Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$. **Chứng minh** $2EF + BF = \sqrt{3} \cdot CF$.

Tứ giác AEHF có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$

Vậy tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{HE}$)

Xét $\triangle EFC$ và $\triangle EAD$: $\widehat{EFC} = \widehat{EAD}$ (cmt); $\widehat{ECF} = \widehat{EDA}$ (tứ giác CDHE nội tiếp).



$$\text{Vậy } \triangle EFC \sim \triangle EAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{EF}{CF} = \frac{AE}{AD} \text{ (d)}$$

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ADC$: $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (gt); $\widehat{EAH}$ (góc chung).

$$\text{Vậy } \triangle AEH \sim \triangle ADC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{HE}{CD} \text{ (e)}$$

Mặt khác $\triangle AEH$: $\widehat{AEH} = 90^\circ$ (gt), $\widehat{AHE} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (tứ giác CDHE nội tiếp)

Vậy $\triangle AEH$ là nửa tam giác đều cạnh AH $\Rightarrow AH = 2HE$ (f)

Xét $\triangle BFC$ và $\triangle HDC$: $\widehat{BFC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ (gt); $\widehat{BCF}$ (góc chung).

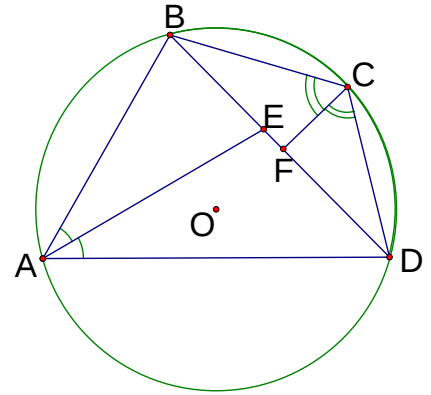
$$\text{Vậy } \triangle BFC \sim \triangle HDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{HD}{CD} \text{ (g)}$$

$$\text{Lại có } \triangle ACD: \widehat{ADC} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \tan \widehat{ACD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ (h)}$$

$$\text{Từ d), e), f), g), h) ta có: } 2\frac{EF}{CF} + \frac{BF}{CF} = \frac{AH}{CD} + \frac{HD}{CD} = \frac{AD}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow 2EF + BF = \sqrt{3}CF \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: (2 điểm) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 120^\circ$ tia phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt BD tại E. Tia phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA} = \frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{1}{CF}$$



Ta có

$$S_{ABD} = S_{ABE} + S_{ADE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot DA \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} AB \cdot AE \cdot \sin \widehat{BAE} + \frac{1}{2} DA \cdot AE \cdot \sin \widehat{DAE}$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot DA \cdot \sin 60^\circ = AB \cdot AE \cdot \sin 30^\circ + DA \cdot AE \cdot \sin 30^\circ \Leftrightarrow AB \cdot DA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (AB + DA) \cdot AE \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{AE} = \frac{AB + DA}{AB \cdot DA} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DA} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } S_{BCD} = S_{BCF} + S_{DCF} \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \widehat{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CF \cdot \sin \widehat{BCF} + \frac{1}{2} CD \cdot CF \cdot \sin \widehat{DCF}$$

$$\Leftrightarrow BC \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = BC \cdot CF \cdot \sin 60^\circ + CD \cdot CF \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow BC \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (BC + CD) \cdot CF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{CF} = \frac{BC + CD}{BC \cdot CD} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} \quad (2)$$

$$\text{Từ 1), 2) suy ra } \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA} = \frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{1}{CF} \text{ (đpcm).}$$

Bài 6: (2 điểm) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + 2y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1 + 3x^2y^2}{xy}$$

$$P = \frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1 + 3x^2y^2}{xy} = \frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1}{xy} + 3xy = \left(\frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1}{4xy} \right) + 3 \left(\frac{1}{4xy} + 16xy \right) - 45xy$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{x^2 + 4y^2} + \frac{1}{4xy} \geq \frac{4}{x^2 + 4y^2 + 4xy} = \frac{4}{(x + 2y)^2} \geq 4 \quad (0 < x + 2y \leq 1)$$

$$; 3 \left(\frac{1}{4xy} + 16xy \right) \geq 3 \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{4xy} \cdot 16xy} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \geq 12 ; 1 \geq x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} > 0 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -45xy \geq -\frac{45}{8}$$

$$\text{Do đó } P \geq 4 + 12 - \frac{45}{8} = \frac{83}{8}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + 2y = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4xy \\ \frac{1}{4xy} = 16xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} . \text{ Vậy } \min(P) = \frac{83}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$