

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021**

Môn: Toán – Lớp: 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày: 3/12/2020

(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn $A = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

b) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^{2020} + y^{2020} + z^{2020} + xyz$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x + 4$ dư 3, chia cho $x - 1$ dư 8. Tìm b, c .

b) Giải phương trình: $\frac{(x^2 - x - 3)(x^2 - 3x - 3) + x^2}{x + 1} = 0$.

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$ với mọi số thực a, b .

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}.$$

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Điểm I thay đổi trên đường chéo BD (điểm I khác B và D). Gọi M, N theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ I đến AB và AD .

a) Chứng minh rằng $IM + IN$ không đổi.

b) Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với MN . Chứng minh đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định vị trí điểm I để tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5. (3,5 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho: $\frac{a^2b+1}{a+1}$ và $\frac{a+1}{b-1}$ là các số nguyên.

b) Trên bàn đồ có 2021 đồng xu. Hai bạn An và Bình thực hiện một số trò chơi bằng cách đi lần lượt như sau: mỗi người, đến lượt của mình sẽ lấy đi một số các đồng xu sao cho nó là ước của số các đồng xu hiện có trên bàn. Người lấy đồng xu lượt cuối cùng là thua. Nếu An đi trước, Bình sẽ dùng chiến thuật như thế nào để chiến thắng?

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – KHÁNH HÒA (2020 – 2021)

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} = |\sqrt{2}-1| - (\sqrt{2}+1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

Mà $x + y + z = 3$ nên $x = y = z = 1$ do đó

$$B = 1^{2020} + 1^{2020} + 1^{2020} + 1 = 4$$

Câu 2.

a) Số dư của đa thức $f(x)$ cho $(x-a)$ là $f(a)$ ta có

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f(1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4)^2 - 4b + c = 3 \\ 1^2 + b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $b = 4; c = 3$

b) ĐKXĐ: $x \neq -1$

$$\text{Ta có } (x^2 - x - 3)(x^2 - 3x - 3) + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x-3)(x+1)]^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3(TM) \\ x = -1(TM) \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-1; 3\}$

Câu 3.

$$\text{a) } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \text{ với mọi số thực } a, b$$

$$\text{Xét } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi số thực } a, b \text{ (1)}$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi số thực } a, b \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $b^2 + 1 \geq 2b$.

Suy ra $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$ và ta có

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2(ab + b + 1)}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2(bc + c + 1)}; \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2(ac + a + 1)}$$

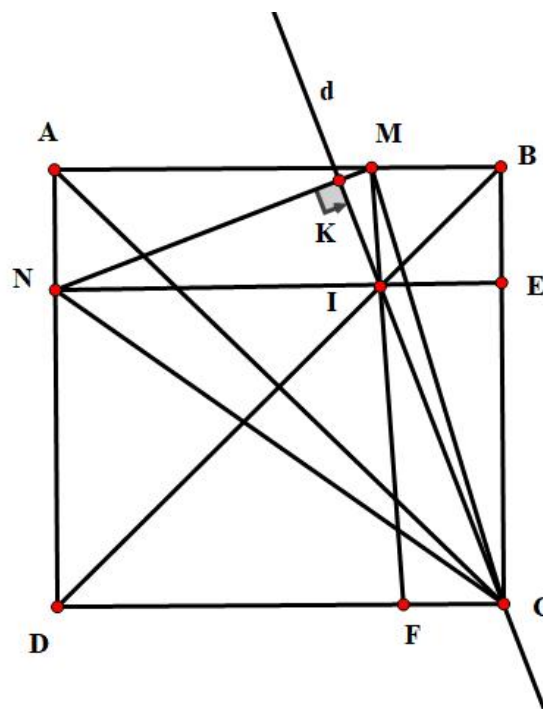
Đặt vế trái của BĐT cần chứng minh là A , ta có

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{b + 1 + ab} + \frac{b}{1 + ab + b} \right) \quad (\text{vì } abc = 1) = \frac{1}{2} \frac{ab + b + 1}{ab + b + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $a = b = c = 1$

Câu 4.



a) Kéo dài MI cắt DC tại F ; Kéo dài NI cắt BC tại E

Xét tứ giác $MIEB$ có $\widehat{B} = \widehat{M} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên tứ giác $MIEB$ là hình chữ nhật

Mà BI là đường phân giác nên hình chữ nhật $MIEB$ là hình vuông

Tương tự tứ giác $NDFI$ là hình vuông

Ta có $IM + IN = AM + BE$ (do tứ giác $ANIM$ là hình chữ nhật)

$$= AM + BM \text{ (Do } MIEB \text{ là hình vuông)}$$

$$= AB \text{ (không đổi)}$$

b) Kéo dài CI cắt MN tại K ta có $\triangle NIM = \triangle CEI$ (c.g.c)

$$\text{xét } \widehat{KIN} + \widehat{NIK} = \widehat{ICE} + \widehat{CIE} = 90^\circ$$

Hay $\widehat{IKN} = 90^\circ$ nên $CI \perp MN$ theo tiên đề Ơ-clit đường thẳng d và đường thẳng CI trùng nhau nên đường thẳng d đi qua điểm C cố định

c) $S_{CMN} = S_{MCI} + S_{ICN} + S_{MIC} = S_{NID} + S_{ICN} + S_{MIB}$ (Do các tam giác đó cùng cạnh đáy và chiều cao)

$$\begin{aligned} S_{CMN} &= \frac{AB^2}{2} - S_{AMN} = \frac{AB^2}{2} - \frac{AM \cdot AN}{4} = \frac{AB^2}{2} - \frac{(AM + AN)^2 - (AM - AN)^2}{8} \\ &\geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3AB^2}{8} \end{aligned}$$

Giá trị diện tích nhỏ nhất $\triangle CMN$ là $\frac{3AB^2}{8}$ khi $AM = AN$ hay điểm I là trung điểm cạnh BD

Câu 5.

a) Từ giả thiết ta có:

$$\left. \begin{array}{l} a^2b+1:a+1 \\ a+1:b-1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2b+1:b-1 \Leftrightarrow a^2(b-1)+a^2+1:b-1 \Rightarrow a^2+1:b-1$$

$$\Rightarrow a^2+1-(a+1)(a-1):b-1 \Leftrightarrow 2:b-1$$

$$\text{Vì } b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b-1 \geq 1 \Rightarrow b \in \{2, 3\}$$

$$\text{TH1: } b=2 \Rightarrow 2a^2+1:a+1 \Rightarrow 2(a^2-1)+3:a+1 \Rightarrow 3:a+1 \text{ vì } a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a=2$$

$$\text{TH2: } b=3 \Rightarrow 3a^2+1:a+1 \Rightarrow 3(a^2-1)+4:a+1 \Rightarrow 4:a+1 \text{ vì } a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \in \{1, 3\}$$

$$\text{Vậy } (a, b) \in \{(1, 3); (2, 2); (3, 3)\}$$

b) Ta có nhận xét: Các số lẻ chỉ có các ước lẻ nên với mọi cách trừ đi một ước của số đó luôn được một số chẵn (có thể bằng 0).

Vậy ta có chiến thuật của Bình như sau. Sau lần lấy đi đồng xu đầu tiên của An trên bàn còn lại một số chẵn đồng xu. Vậy Bình cần lấy đi một ước lẻ của số đồng xu ấy để đưa số xu còn lại về lẻ. Khi đó An chỉ có thể để lại số chẵn đồng xu trên bàn. Cứ làm như vậy An phải là người lấy đi các đồng xu cuối cùng (lấy hết số xu khi số đồng xu lớn hơn 1 hoặc lấy đồng xu cuối cùng).