

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 13 câu)

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài: 120 phút

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ (10 điểm, thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi, mỗi câu 1,0 điểm)

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$, biết $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$.

Câu 2. Cho đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B sao cho tam giác AOB vuông cân.

Câu 3. Cho dãy số được xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Tính giá trị u_{2024} .

Câu 4. Bạn Hà làm một bài thi gồm 20 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm, mỗi câu bỏ qua không trả lời được 0 điểm. Tính số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua không trả lời của bạn Hà, biết rằng bạn Hà được 57 điểm.

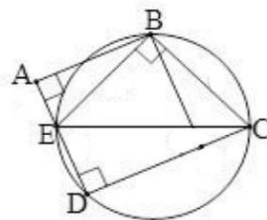
Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab \neq 0$ và $\begin{cases} a(3a^2 + 4b^2) = bc \\ b(a^2 + 3b^2) = 2ac \end{cases}$. Tính giá trị của $P = \frac{2a^4 + b^4}{b^4 + 3a^4}$.

Câu 6. Cho hình vẽ, biết rằng $AE = 2, ED = 3, CB = 6$. Trong đó AB và CD cùng vuông góc với AD tại A và tại D . Tìm độ dài đoạn BE .

Câu 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0.$$

Câu 8. Giải phương trình $(x+6)^2 - 8\sqrt{x^3 + 3x} = 33$.



Câu 9. Cho tam giác ABC có đường cao AH , đường phân giác trong AD sao cho $AC - AB = 36\text{cm}, DC - DB = 24\text{cm}$. Tính giá trị $HC - HB$.

Câu 10. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a + b + c = 100$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (10 điểm, thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11. (4,0 điểm)

a. (1,0 điểm) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 - 4b + 1$ chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$.

Chứng minh $|a-2b|$ là số chính phương.

b. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(4x^2 - 3y) = 9x + (y+3)\sqrt{y+3} \\ 3x^2 - 2y + 1 = 7x + 2\sqrt{x+3} \end{cases}$.

Câu 12. (4,0 điểm) Cho đường tròn đường kính BC , A là một điểm thuộc đường tròn (A khác B và C), kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB và AHC . Đường thẳng MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K . Đường thẳng AN cắt BC tại D .

a. Chứng minh tam giác ABD cân.

b. Chứng minh $ME \cdot NK = MI \cdot NE$.

Câu 13. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm và $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3}$.

----- Hết -----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 13 câu)

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ (10 điểm, thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi, mỗi câu 1,0 điểm)

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$, biết $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$.

Gợi ý: Ta có: $x^3 = 10 + 3x \cdot \sqrt[3]{(5 + 2\sqrt{13})(5 - 2\sqrt{13})} \Leftrightarrow x^3 + 9x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 10) = 0$

Vì $x^2 + x + 10 > 0 \Rightarrow x = 1$. Do đó $P = \frac{16}{11}$.

Câu 2. Cho đường thẳng $(d): y = (m - 1)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B sao cho tam giác AOB vuông cân.

Gợi ý: Nếu $m = 1$ thì (d) song song với Ox .

Xét $m \neq 1$. Ta có tọa độ $A\left(\frac{-3}{m-1}; 0\right)$, $B(0; 3)$. Để tam giác AOB vuông cân thì $OA = OB$

$$\Rightarrow \left| \frac{-3}{m-1} \right| = 3 \Leftrightarrow |m-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=1 \\ m-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=0 \end{cases}.$$

Câu 3. Cho dãy số được xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Tính giá trị u_{2024} .

Gợi ý: Ta có $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_2 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \Rightarrow u_3 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots;$

$$u_{2024} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = 2 - \frac{1}{2024} = \frac{4047}{2024}.$$

Câu 4. Bạn Hà làm một bài thi gồm 20 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm, mỗi câu bỏ qua không trả lời được 0 điểm. Tính số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua không trả lời của bạn Hà, biết rằng bạn Hà được 57 điểm.

Gợi ý: Gọi số câu Hà trả lời đúng là a , số câu trả lời sai là b .

Với $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 20; 0 \leq b < 20$ và $a + b \leq 20$.

Ta có $5a - b = 57 \Leftrightarrow b + 2 = 5a - 55 \Rightarrow (b + 2)$ chia hết cho 5 $\Rightarrow b + 2 \in \{5; 10; 15\} \Leftrightarrow b \in \{3; 8; 13\}$

Với $b = 3 \Rightarrow a = 12$; Với $b = 8 \Rightarrow a = 13$; Với $b = 13 \Rightarrow a = 14$.

Vì $a + b \leq 20$ nên Hà trả lời đúng 12 câu, trả lời sai là 3 câu và bỏ qua 5 câu.

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab \neq 0$ và $\begin{cases} a(3a^2 + 4b^2) = bc \\ b(a^2 + 3b^2) = 2ac \end{cases}$.

Tính giá trị của $P = \frac{2a^4 + b^4}{b^4 + 3a^4}$.

Gợi ý: Vì $ab \neq 0$ nên $\begin{cases} a(3a^2 + 4b^2) = bc \\ b(a^2 + 3b^2) = 2ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2(3a^2 + 4b^2) = 2abc \\ b^2(a^2 + 3b^2) = 2abc \end{cases}$

$$\Rightarrow 2a^2(3a^2 + 4b^2) = b^2(a^2 + 3b^2) \Leftrightarrow 6a^4 + 7a^2b^2 - 3b^4 = 0 \Leftrightarrow (3a^2 - b^2)(2a^2 + 3b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow P = \frac{2a^4 + b^4}{b^4 + 3a^4} = \frac{11}{12}.$$

Câu 6. Cho hình vẽ, biết rằng $AE = 2, ED = 3, CB = 6$. Trong đó AB và CD cùng vuông góc với AD tại A và tại D . Tìm độ dài đoạn BE .

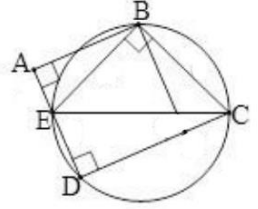
Gợi ý: Kẻ $BH \perp CD$ tại H . Dễ thấy $ABHD$ là hình chữ nhật

$BH = AD = 2 + 3 = 5$. Áp dụng định lý Pythagore, ta có

$$HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}. \text{ Vì } EDC = 90^\circ \text{ nên } EC \text{ là đường}$$

kính, suy ra $EBC = 90^\circ = ABH \Rightarrow ABE = HBC \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle HBC$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{AE}{HC} \Rightarrow BE = \frac{AE \cdot BC}{HC} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{11}} = \frac{12\sqrt{11}}{11}$$



Câu 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Gợi ý: Ta có: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2y - 2x - 4y^2 - 8y - 4 + 7 = 0 \Leftrightarrow (x + y - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow [(x + y - 1) - 2(y + 1)] \cdot [(x + y - 1) + 2(y + 1)] = -7 \Leftrightarrow (x - y - 3)(x + 3y + 1) = -7$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - y - 3 = -7 \\ x + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - y - 3 = 1 \\ x + 3y + 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x - y - 3 = -1 \\ x + 3y + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x - y - 3 = 7 \\ x + 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Vậy $(x; y) \in \{(-3; 1), (1; -3), (3; 1), (7; -3)\}$.

Câu 8. Giải phương trình $(x + 6)^2 - 8\sqrt{x^3 + 3x} = 33$.

Gợi ý: Ta có ĐKXĐ: $x \geq 0$.

$$\text{Phương trình tương đương } x^2 + 12x + 3 - 8\sqrt{x(x^2 + 3)} = 0.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 3} = a \geq 3; \sqrt{x} = b \geq 0. \text{ Ta có } a^2 + 12b^2 - 8ab = 0 \Leftrightarrow (a - 6b)(a - 2b) = 0.$$

$$\text{Xét } a = 6b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 36x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 18 \pm \sqrt{321}$$

$$\text{Xét } a = 2b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3.$$

$$\text{Đổi chiều ĐKXĐ ta có tập nghiệm } S = \{18 - \sqrt{321}; 18 + \sqrt{321}; 1; 3\}.$$

Câu 9. Cho tam giác ABC có đường cao AH , đường phân giác trong AD sao cho $AC - AB = 36\text{cm}$, $DC - DB = 24\text{cm}$. Tính giá trị $HC - HB$.

Gợi ý: Đặt $AB = x$, $DB = y$ thì $AC = x + 36$, $DC = y + 24$.

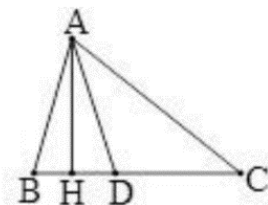
Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} \Leftrightarrow \frac{x + 36}{x} = \frac{y + 24}{y} \Leftrightarrow 2x = 3y.$$

$$\text{Lại có } AH^2 = AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$$

$$\Leftrightarrow (AC - AB)(AC + AB) = (HC - HB)(HC + HB)$$



$$\Leftrightarrow 36(x+36+x) = (HC-HB)(2y+24) \Leftrightarrow HC-HB = \frac{36(2x+36)}{2y+24} = \frac{36(3x+36)}{2y+24} = 54$$

Vậy $HC-HB=54\text{cm}$.

$$\Leftrightarrow 36(x+36+x) = (HC-HB)(2y+24) \Leftrightarrow HC-HB = \frac{36(2x+36)}{2y+24} = \frac{36(3y+36)}{2y+24} = 54$$

Vậy $HC-HB=54\text{cm}$.

Câu 10. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=100$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$.

Gợi ý: Giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 98$. Khi đó $100 = a+b+c \leq 3c \Leftrightarrow c \geq \frac{100}{3}$.

Vì c nguyên dương nên $c \geq 34$.

$$\text{Ta có } M = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3}$$

Vì $1 \leq a \leq b \leq c \leq 98$ và $c \geq 34$ nên

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 1^2 + 1^2 \Rightarrow M \geq \frac{100^2 + 2}{3} = 3334$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 97^2 + 97^2 \Rightarrow M \leq \frac{100^2 + 2 \cdot 97^2}{3} = 9606$$

Vậy GTNN của M là 3334. Đạt được khi $(a; b; c)$ là các hoán vị của $(33; 33; 34)$

GTLN của M là 9606. Đạt được khi $(a; b; c)$ là các hoán vị của $(1; 1; 98)$

II- PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11. a. Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 - 4b + 1$ chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$.

Chứng minh $|a-2b|$ là số chính phương.

$$\text{b. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x(4x^2 - 3y) = 9x + (y+3)\sqrt{y+3} \\ 3x^2 - 2y + 1 = 7x + 2\sqrt{x+3} \end{cases}$$

Lời giải. a) Ta có $(a^2 - 4b + 1) : (a-2b)(2b-1)$. Đặt $a^2 - 4b + 1 = k(a-2b)(2b-1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Suy ra } a^2 - 4b^2 + 4b^2 - 4b + 1 = k(a-2b)(2b-1) \Leftrightarrow (2b-1)^2 = (a-2b)[k(2b-1) - (a+2b)]$$

$$\text{Gọi } (k(2b-1) - (a+2b), a-2b) = d \Rightarrow \begin{cases} k(2b-1) - (a+2b) : d \\ a-2b : d \end{cases}$$

$$\text{Vì } (2b-1)^2 = (a-2b)[k(2b-1) - (a+2b)] \text{ nên } (2b-1)^2 : d^2 \Rightarrow (2b-1) : d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+2b) : d \\ (a-2b) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b : d \\ 2(2b-1) : d \end{cases} \Rightarrow 2 : d. \text{ Vì } 2b-1 \text{ là số lẻ nên } d = 1.$$

Vậy $(a-2b) = x^2$ ($x \in \mathbb{Z}$), suy ra $|a-2b|$ là số chính phương.

$$\text{b) ĐKXD: } x \geq -1; y \geq -3. \text{ Từ phương trình } x(4x^2 - 3y) = 9x + (y+3)\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3x(y+3) - (y+3)\sqrt{y+3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x(y+3) + x(y+3) - (y+3)\sqrt{y+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x - \sqrt{y+3})(x + \sqrt{y+3}) + (y+3)(x - \sqrt{y+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{y+3})(4x^2 + 4x\sqrt{y+3} + y+3) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{y+3})(2x + \sqrt{y+3})^2 = 0$$

Xét $x = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ thế vào phương trình $3x^2 - 2y + 1 = 7x + 2\sqrt{x+1}$ được

$$x^2 + 7 = 7x + 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = (\sqrt{x+1} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + 1 = x - 3 \\ \sqrt{x+1} + 1 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = x - 4 \\ \sqrt{x+1} = 2 - x \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x+1} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \frac{45 + 9\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x+1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{13 - 5\sqrt{13}}{2}$$

Xét $2x + \sqrt{y+3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = 4x^2 - 3 \end{cases}$ thế vào phương trình $3x^2 - 2y + 1 = 7x + 2\sqrt{x+1}$ được

$$5x^2 + 7x - 7 + 2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 5x(x+1) + 2x + 2\sqrt{x+1} - 7 = 0$$

Do $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 5x(x+1) + 2x + 2\sqrt{x+1} - 2 - 5 < 0$, vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{9 + \sqrt{21}}{2}; \frac{45 + 9\sqrt{21}}{2} \right); \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{13 - 5\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$

Câu 12. Cho đường tròn đường kính BC , A là một điểm thuộc đường tròn (A khác B và C), kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB và AHC . Đường thẳng MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K . Đường thẳng AN cắt BC tại D .

a. Chứng minh tam giác ABD cân.

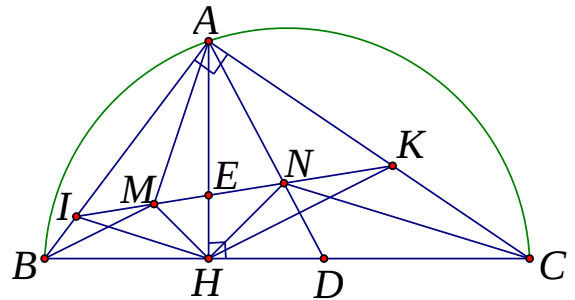
b. Chứng minh $ME \cdot NK = MI \cdot NE$.

Lời giải. a) Ta có $ADB = ACD + DAC$

$$= BAH + HAD = BAD \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B.$$

b) Dễ thấy $BAC = 90^\circ$; $AHN = NHC = 45^\circ$

$$MAH = \frac{1}{2} BAH = \frac{1}{2} ACH = NCH$$



$$\Rightarrow \triangle MAH \sim \triangle NCH \Rightarrow \frac{MH}{NH} = \frac{AH}{CH}; \triangle AHB \sim \triangle CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow \frac{MH}{NH} = \frac{HB}{HA}$$

$$MHN = AHB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle NHM (c - g - c) \Rightarrow HMN = ABH \Rightarrow IMH + ABH = 180^\circ$$

$$\Rightarrow BIM + BHM = 180^\circ \Rightarrow AIK = BHM = 45^\circ \Rightarrow \triangle AIK \text{ vuông cân} \Rightarrow AI = AK. \text{ Áp dụng tính chất}$$

đường phân giác của tam giác, ta có $\frac{MI}{ME} = \frac{AI}{AE} = \frac{AK}{AE} = \frac{NK}{NE} \Rightarrow ME \cdot NK = MI \cdot NE$

Câu 13. Cho a, b, c là các số thực không âm và $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3}$.

Lời giải. Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 - (b^2 + c^2) \leq 4 \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$

Tương tự ta cũng có $0 \leq b; c \leq 2$

$$\text{Suy ra } a(2-a)(a^2 + 2a + 7) \geq 0 \Leftrightarrow 14a \geq a^2(a^2 + 3) \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 3} \geq \frac{a^2}{14}$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{b^2+3} \geq \frac{b^2}{14}; \frac{c}{c^2+3} \geq \frac{c^2}{14}$. Do đó $P \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{14} = \frac{2}{7}$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{2}{7}$. Đạt được khi $(a;b;c)$ là các hoán vị của $(0;0;2)$.