

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$

Rút gọn P . Tìm tất cả các giá trị của x để $P \leq -\frac{1}{7}$

b) Cho phương trình ẩn x là $x^2 - px + q = 0(1)$ (với p, q là các số nguyên tố). Tìm tất cả các giá trị của p và q biết phương trình (1) có nghiệm là các số nguyên dương

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{-x^2 + 2x + 6} = 3 + 2x$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy^2 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), M là trung điểm cạnh BC . P là một điểm di động trên đoạn AM (P khác A và M). Đường tròn đi qua P , tiếp xúc với đường thẳng AB tại A , cắt đường thẳng BP tại K (K khác P). Đường tròn đi qua P , tiếp xúc với đường thẳng AC tại A , cắt đường thẳng CP tại L (L khác P)

a) Chứng minh $BP \cdot BK + CP \cdot CL = BC^2$

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PKC luôn đi qua hai điểm cố định

c) Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PKC và E là giao điểm thứ hai của đường ngoại tiếp tam giác PLB và F là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng AB . Chứng minh $EF \parallel IJ$

Bài 4. (1,0 điểm)

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 5$. Chứng minh :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 5}} + \frac{3z}{\sqrt{6(z^2 + 5)}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào}$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y - xy - 2x^2 + 5x = 4$

b) Giả sử rằng A là tập con của tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 1023\}$ sao cho A không chứa hai số nào mà số này gấp đôi số kia. Hỏi A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} a) P &= \left(\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \right) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow P = \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \leq -\frac{1}{7} &\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \leq -\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7-7\sqrt{x} \leq -x-\sqrt{x}-1 \left(\text{do } x+\sqrt{x}+1 > 0, \forall x \geq 0 \right) \\ &\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+8 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-4) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 16 \end{aligned}$$

b) Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $\Delta = p^2 - 4q \geq 0 (*)$

Áp dụng định lý Vi - et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}, x_1, x_2 \in \mathbb{N}^+$

Vì q là số nguyên tố nên $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Nếu $x_1 = 1 \Rightarrow 1 + x_2 = p$ và x_2 là các số nguyên tố liên tiếp $\Rightarrow x_2$ là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x_2 = q = 2, p = 3$. Tương tự $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = q = 2, p = 3$

Ta thấy $q = 2, p = 3$ thỏa mãn điều kiện $(*)$ là các giá trị cần tìm.

Bài 2.

a) Đặt $a = x+1; b = \sqrt{-x^2 + 2x + 6}, b \geq 0$

Ta được: $\begin{cases} ab = 3 + 2x \\ a^2 + b^2 = 4x + 7 \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = a-1 \\ b = a+1 \end{cases}$

*) $b = a-1 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 6} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

*) $b = a+1 \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 6} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$

b) Với điều kiện $x, y \neq 0$ thì hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy^2 \\ xy + 3y^2 = 2xy^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

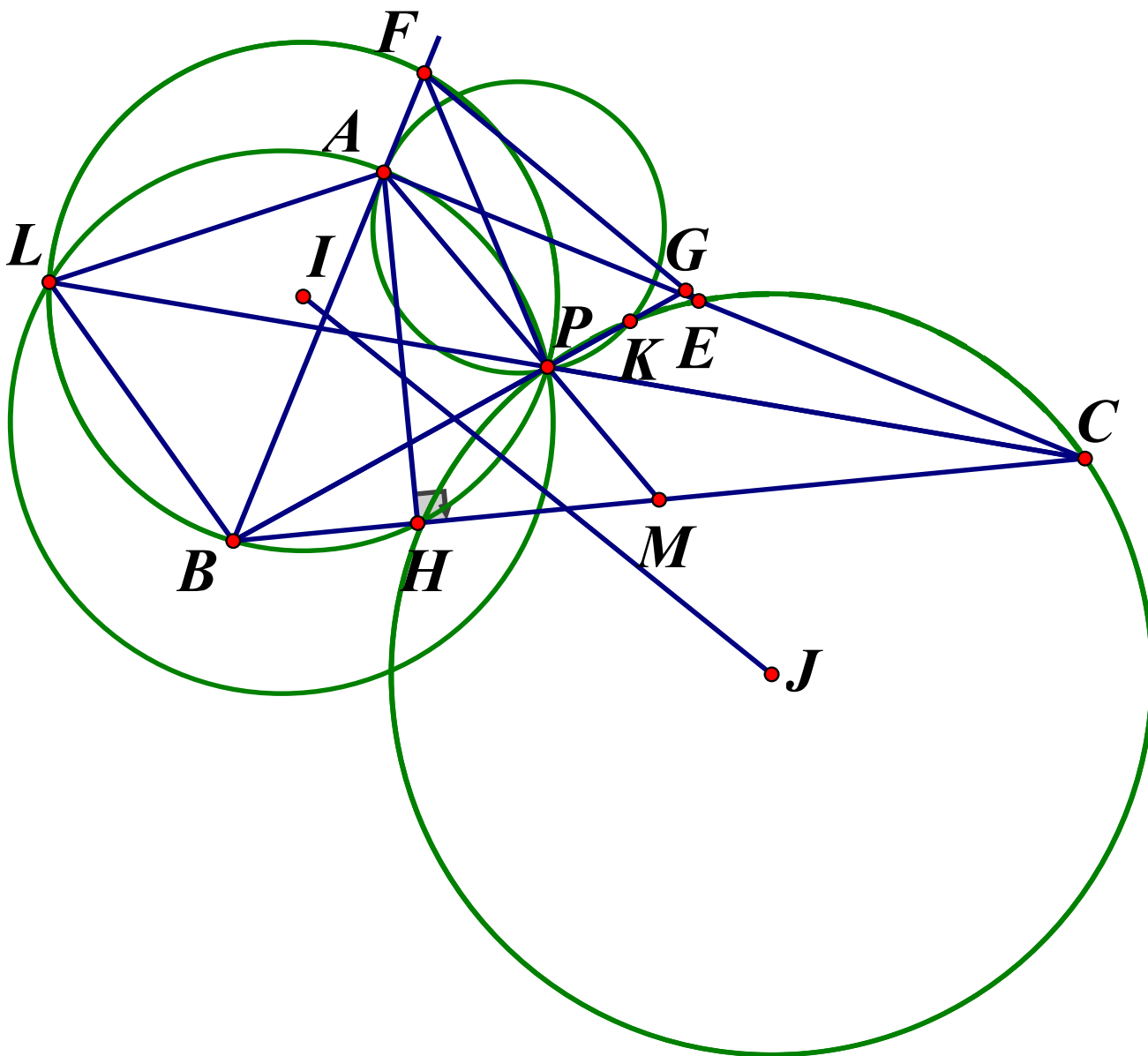
$$\Rightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$*) x = -y \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 + x^2 = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ do } x, y \neq 0$$

$$*) x = 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + y^2 = 4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = \left\{ (1; -1); \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4} \right) \right\}$$

Bài 3.



a) BA là tiếp tuyến của đường tròn (APK) nên $BA^2 = BP.BK$ (1)

CA là tiếp tuyến của đường tròn (APL) nên $CA^2 = CP.CL$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BP.BK + CP.CL = BA^2 + CA^2 = BC^2$

b) Gọi AH là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BA^2 = BH.BC$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow BP.BK = BH.BC \Rightarrow$ tứ giác $HPKC$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PKC đi qua hai điểm cố định C và H

c) Theo câu b) đường tròn (J) đi qua H . Chứng minh tương tự (I) đi qua H

(I) và (J) cắt nhau tại H, P nên $IJ \perp HP$ (4)

Tứ giác $HPEC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AEP = \angle PHC$ (5)

Tứ giác $HPFB$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AFP = \angle PHC$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $APEF$ nội tiếp nên $\angle EPF = \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow PE \perp PF$
Gọi G là giao điểm của HP và EF . Do các tứ giác $HPEC$ và $APEF$ nội tiếp nên

$$\angle GPE = \angle HCE = \angle MCA = \angle MAC = \angle PAE = \angle PFE$$

$$\Rightarrow \angle GPE + \angle GEP = \angle PFE + \angle GEP = 90^\circ \Rightarrow PG \perp EF \text{ hay } HP \perp EF \text{ (7)}$$

Từ (4), (7) suy ra $IJ \parallel EF$

Bài 4.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2}{x+y} \cdot \frac{3}{x+z}} + \frac{y}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{3}{y+z} \cdot \frac{2}{y+x}} + \frac{3z}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{1}{z+x} \cdot \frac{1}{z+y}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{2x}{x+y} + \frac{3x}{x+z} + \frac{3y}{y+z} + \frac{2y}{y+x} + \frac{3z}{z+x} + \frac{3z}{z+y} \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (2+3+3) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{2}{x+y} = \frac{3}{y+z} = \frac{3}{z+x} \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x = 2y \\ 5x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1; z = 2$

Bài 5.

a) Phương trình ban đầu tương đương với

$$xy(x-1) = 2x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow y(x-1) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x} = 2x - 5 + \frac{4}{x} \quad (x \neq 0)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Sau khi thử các giá trị của y thỏa mãn nguyên dương ta có $(x, y) = (2; 1)$

b) Chia các số từ 1 đến 1023 thành các tập con $A_0 = \{1\}; A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
 $A_3 = \{8, 9, \dots, 15\}; A_4 = \{16, 17, \dots, 31\}; A_5 = \{32, 33, \dots, 63\}, A_6 = \{64, 65, \dots, 127\}$
 $A_7 = \{128, 129, \dots, 255\}; A_8 = \{256, 257, \dots, 511\}; A_9 = \{512, 513, \dots, 1023\}$

Dễ thấy số phần tử của tập A_k là $2^k, k = 0, 1, 2, \dots, 9$

Nhận thấy $n \in A_k \Leftrightarrow 2n \in A_{k+1}$

Xét $A = A_9 \cup A_7 \cup A_5 \cup A_3 \cup A_1 \Rightarrow |A| = 512 + 128 + 32 + 8 + 2 = 682$, rõ ràng A không chứa nào nào gấp đôi số khác.

Ta chỉ ra rằng không thể chọn tập con có nhiều hơn 682 số thỏa mãn bài ra

Thật vậy, Giả sử tập A thỏa mãn yêu cầu bài toán và chứa a_k phần tử thuộc A_k , $k = 0, 1, \dots, 9$

Xét các tập hợp A_k và A_{k+1} . Với $m \in A_k$ tùy ý, ta có $2m \in A_{k+1}$. Số các cặp $(m, 2m)$ như vậy là 2^k và trong mỗi cặp như vậy có nhiều nhất 1 số thuộc A

Ngoài ra tập A_{k+1} còn chứa 2^k số lẻ, tức là có nhiều nhất $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ số thuộc A được lấy từ A_k và A_{k+1} .

Suy ra $a_0 + a_1 \leq 2^1, a_2 + a_3 \leq 2^3, a_4 + a_5 \leq 2^5, a_6 + a_7 \leq 2^7, a_8 + a_9 \leq 2^9$. Cộng các bất đẳng thức ta được $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 \leq 682$. Vậy số phần tử lớn nhất của A là 682