

1. Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên năm học 2023 – 2024, Tiền Giang

ĐỀ BÀI

◆ Câu 1.

1) Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{x - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

2) Giải phương trình $2x^2 + 2x - 1 = 3x\sqrt{2x - 1}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3 = 2x + 4y & (1) \\ 2x^3 + y^3 = 3x + 3y & (2) \end{cases}$

◆ Câu 2.

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m - 1)x + 3$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$.

2) Chứng minh rằng phương trình $(ax^2 + 2bx + c)(bx^2 + 2cx + a)(cx^2 + 2ax + b) = 0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a, b, c .

3) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x > 1, y > 1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

◆ Câu 3. Cho hai số nguyên p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2 + q^2 = 2(3pq - 4)$ (*)

1) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p, q) thỏa (*)

◆ Câu 4. Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC , D là trung điểm của AC , tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E .

1) Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $DA^2 = DE \cdot DB$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O) . Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF .

ĐÁP ÁN

◆ Câu 1.

1) Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{x - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$.

📁 Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - (\sqrt{5} + 1) \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} - 1 = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

Suy ra $(x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2$

Do đó $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024} = 2023^{2024}$.

2) Giải phương trình $2x^2 + 2x - 1 = 3x\sqrt{2x-1}$.

📁 Lời giải:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$2x^2 + t^2 = 3xt \Leftrightarrow t^2 - 3xt + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (t-x)(t-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 2x \end{cases}$$

Với $t = x, x \geq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x-1 = x^2 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 2x, x \geq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1} = 2x \Leftrightarrow 2x-1 = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0$, phương trình vô nghiệm do $\Delta' < 0$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3 = 2x + 4y & (1) \\ 2x^3 + y^3 = 3x + 3y & (2) \end{cases}$

📁 Lời giải:

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) về theo về ta được

$$x^3 - y^3 = -x + y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ do } x^2+xy+y^2+1=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0, \forall x, y$$

Thay $y=x$ vào phương trình (1), ta được $3x^3=6x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\{(0); (\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$.

◆ Câu 2.

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2(m-1)x+3$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=5$.

📁 Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2=2(m-1)x+3 \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x-3=0$$

Do $1 \cdot (-3) = -3 < 0$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Do đó đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) & (1) \\ x_1x_2=-3 & (2) \end{cases}$$

Lấy $x_1+2x_2=5$ trừ (1) vế theo vế ta được
$$\begin{cases} x_2=7-2m \\ x_1=2(m-1)-(7-2m)=4m-9 \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được $(7-2m)(4m-9)=-3 \Leftrightarrow -8m^2+46m-60=0$

$$\Leftrightarrow 4m^2-23m+30=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=\frac{15}{4} \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{2; \frac{15}{4}\right\}$

2) Chứng minh rằng phương trình $(ax^2+2bx+c)(bx^2+2cx+a)(cx^2+2ax+b)=0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a, b, c .

📁 Lời giải:

Ta có $(ax^2 + 2bx + c)(bx^2 + 2cx + a)(cx^2 + 2ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2bx + c = 0 & (1) \\ bx^2 + 2cx + a = 0 & (2) \\ cx^2 + 2ax + b = 0 & (3) \end{cases}$

- Trường hợp 1: Nếu $a.b.c = 0$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm

- Trường hợp 2: Nếu $a.b.c \neq 0$, ta có $\begin{cases} \Delta'_1 = b^2 - ac \\ \Delta'_2 = c^2 - ab \\ \Delta'_3 = a^2 - bc. \end{cases}$

Khi đó $2(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$
 $= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$

Suy ra một trong ba số $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ không âm.

Do đó, một trong ba phương trình (1), (2), (3) có nghiệm nên ta có điều phải chứng minh

3) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x > 1, y > 1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

 **Lời giải:**

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $(x-1)$ và 1 ta được

$$x = (x-1) + 1 \geq 2\sqrt{(x-1).1} = 2\sqrt{x-1}.$$

Vậy $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ với mọi số thực $x > 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $\frac{x^2}{y-1}$ và $\frac{y^2}{x-1}$ ta được

$$T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1} \cdot \frac{y^2}{x-1}} = 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2.2.2 = 8$$

Vậy $\min T = 8$ khi $x = y = 2$.

◆ **Câu 3.** Cho hai số nguyên p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2 + q^2 = 2(3pq - 4)$ (*)

1) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p, q) thỏa (*)

📁 **Lời giải:**

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

- Giả sử trong hai số p, q không có số nào chia hết cho 3.
- Khi đó p^2, q^2 chia 3 dư 1. Suy ra:
 - +) $p^2 + q^2$ chia 3 dư 2;
 - +) Trong khi vế phải $2(3pq - 4) = 6pq - 9 + 1$ chia 3 dư 1, vô lý
- Do đó trong hai số p, q phải có ít nhất một số là bội của 3.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p, q) thỏa (*)

- Do vai trò của p, q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3.
- Do q nguyên tố nên $q = 3$
- Khi đó từ (*) ta có $p^2 + 9 = 2(2p - 4) \Leftrightarrow p^2 - 18p + 17 = 0 \Leftrightarrow p = 1$ hoặc $p = 17$
- Do p nguyên tố nên $p = 17$.

Vậy các cặp số $(p; q)$ thỏa mãn (*) là $(p; q) \in \{(17; 3); (3; 17)\}$.

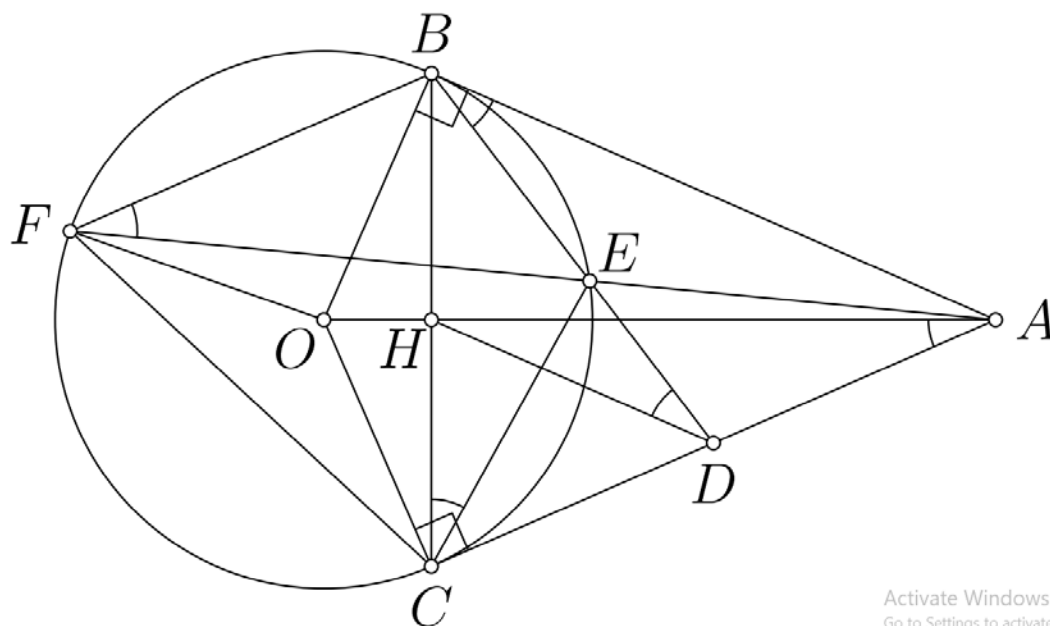
◆ **Câu 4.** Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

1) Chứng minh CDEH là một tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $DA^2 = DE \cdot DB$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

📁 **Lời giải:**



1) Chứng minh CDEH là một tứ giác nội tiếp.

Ta có

- $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
- $OB = OC$ (bán kính (O)) nên AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.
- $\triangle ABC$ có D là trung điểm AC, H là trung điểm BC nên HD là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $HD // AB$.

Khi đó $\widehat{HDE} = \widehat{ABE} = \widehat{BCE} = \widehat{HCE} = \frac{1}{2}sd \widehat{BE}$

Do đó, tứ giác CDEH nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$

Xét $\triangle DCE$ và $\triangle DBC$ ta có

 $\widehat{EDC}$ chung

$$\widehat{DCE} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}sd \widehat{BE}$$

Suy ra $\Delta DCE \simeq \Delta DBC$ (g-g)

Do đó $\frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC}$. Suy ra $DC^2 = DE.DB$

Mặt khác, do $DA = DC$ nên $DA^2 = DE.DB$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

- Từ $DA^2 = DE \cdot DB$ nên ta có $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DA}$
- Xét hai tam giác DAE và tam giác DBA có

+) $\widehat{EDA}$ chung;

+) $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DA}$

Do đó $\triangle DAE \sim \triangle DBA$

- Suy ra $\widehat{EAD} = \widehat{DBA} = \widehat{DFA} = \frac{1}{2} \widehat{BE}$, do đó $BF \parallel AC$.
- Mà $OC \perp AC$ nên $OC \perp BF$.
- Mặt khác, $OF = OB$ (bán kính của (O)) nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.