

Hướng dẫn giải đề chọn ĐTQG tỉnh Ninh Thuận môn Toán năm học 2023-2024

(Nguyễn Sơn Phú - Bùi Hữu Thân - Mai Tiến Đạt)

I. Đề bài:

Câu 1: Cho dãy số (u_n) thoả

$$\begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 2: Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{24x - 11} - 16x\sqrt{2x - 1} - 1 \geq 0$

Câu 3: Tìm tất cả các số thực x, y thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 2 \\ x^{x+1} \cdot y^{y+1} \geq 1 \end{cases}$$

Câu 4: Tìm các hàm số $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, thoả mãn điều kiện:

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy), \forall x, y > 1$$

Câu 5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại B và D cắt nhau tại điểm P trên tia AC. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt đường thẳng PD, AD lần lượt tại Q và R. Đường thẳng AQ cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng ba điểm B, E, R thẳng hàng.

Câu 6: Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

II. Hướng dẫn giải: (Không phải lời giải chính thức, chỉ có giá trị tham khảo)

Câu 1: Cho dãy số (u_n) thoả

$$\begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Giải:

- Ta chứng minh bằng quy nạp, rằng $u_n > 2$ với mọi n nguyên dương.
Thật vậy, ta xét:

+) Với $n = 1$ thì $u_1 > 2$, thỏa mãn.

+) Giả sử với $n = k$ thì $u_k > 2$, ta chứng tỏ $u_{k+1} > 2$.

Ta có:

$$u_{k+1} - 2 = \frac{7u_k + 4}{2u_k + 5} - 2 = \frac{3(u_k - 2)}{2u_k + 5} > 0, \text{ khi } u_k > 2$$

Vậy $u_{k+1} > 2$, nên theo nguyên lý quy nạp thì $u_n > 2$ với mọi n nguyên dương.

Khi đó, ta xét:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 2u_n + 4}{2u_n + 5} = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{2u_n + 5} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (đpcm).

b. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{3(u_n - 2)}{2u_n + 5} \\ \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2} &= \frac{2u_n + 5}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u_n - 2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$, ta được:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3} \\ v_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bằng tính toán, ta sẽ chỉ ra được:

$$v_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^n - 1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Như vậy:

$$u_n = 2 + \frac{3^n}{3^n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 2: Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{24x - 11} - 16x\sqrt{2x - 1} - 1 \geq 0$

*Giải:

ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$

Với ĐKXĐ, ta có: $\sqrt[3]{24x - 11} - 16x\sqrt{2x - 1} - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{12(2x - 1)}{(\sqrt[3]{24x - 11})^2 + \sqrt[3]{24x - 11} + 1} - 16x\sqrt{2x - 1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} \left(\frac{3\sqrt{2x - 1}}{4x(\sqrt[3]{24x - 11})^2 + \sqrt[3]{24x - 11} + 1} - 1 \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét: $\sqrt{2x-1} \leq x$, khi $x \geq \frac{1}{2}$.

Do vậy, với x thỏa điều kiện xác định, ta có:

$$\frac{3\sqrt{2x-1}}{4x(\sqrt[3]{24x-11})^2 + \sqrt[3]{24x-11} + 1} \leq \frac{3}{4(1^2 + 1 + 1)} < 1$$

Như vậy, để (1) xảy ra thì

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy, $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của bất phương trình.

Câu 3: Tìm tất cả các số thực x, y thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 2 \\ x^{x+1} \cdot y^{y+1} \geq 1 \end{cases}$$

*Giải:

Giả sử x khác y . Không mất tính tổng quát ta giả sử $x < y$. Khi đó $0 < x < 1 < y$.

Vì $x + y = 2$ nên $y = 2 - x$.

Ta có $x^{x+1} \cdot y^{y+1} \geq 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (x+1) \ln x + (y+1) \ln y &\geq 0 \\ \Rightarrow (x+1) \ln x + (3-x) \ln(2-x) &\geq 0\end{aligned}$$

Giả sử x khác y . Không mất tính tổng quát ta giả sử $x < y$, khi đó $0 < x < 1$.

Xét hàm $f(x) = (x+1) \ln x + (3-x) \ln(2-x)$, với $x \in (0; 1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2-x} + \ln x - \ln(2-x)$$

Ta lại có:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = -\frac{4(1-x)^2}{(2-x)^2 x^2} < 0, \forall x \in (0; 1)$$

Như vậy, hàm $f'(x)$ là hàm giảm ngặt trên khoảng $(0; 1)$

$$\Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0, \forall x \in (0; 1)$$

Như vậy, hàm $f(x)$ là hàm tăng ngặt trên khoảng $(0; 1)$

$$\Rightarrow f(x) < f(1) = 0, \forall x \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow (x+1) \ln x + (y+1) \ln y < 0$$

Mâu thuẫn.

Vậy, giả sử là sai, nên $x = y = 1$. Thử lại, $x = y = 1$ thỏa mãn.

Câu 4: Tìm các hàm số $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy), \forall x, y > 1$$

*Giải: (Tham khảo lời giải của anh Mai Tiến Đạt)

Ta xét các số $a, b, c > 1$ bất kì.

Từ giả thiết, cho $x \rightarrow ab, y \rightarrow c$, ta được:

$$\begin{aligned} f(ab) - f(c) &= (c - ab)f(abc), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow f(abc)(c - ab)(a - b) &= (a - b)f(ba) - (a - b)f(c), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow f(abc)(c - ab)(a - b) &= f(b) - f(a) - (a - b)f(c), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow (bc - a)(b - c)f(abc)(c - ab)(a - b) \\ &= (bc - a)(b - c)[f(b) - f(a) - (a - b)f(c)], \forall a, b, c > 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Từ giả thiết, cho $x \rightarrow a, y \rightarrow bc$, ta được:

$$\begin{aligned} f(a) - f(bc) &= (bc - a)f(abc), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow (bc - a)(b - c)f(abc) &= (b - c)f(a) - (b - c)f(bc), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow (bc - a)(b - c)f(abc) &= (b - c)f(a) + f(b) - f(c), \forall a, b, c > 1 \\ \Rightarrow (a - b)(c - ab)(bc - a)(b - c)f(abc) \\ &= (a - b)(c - ab)[(b - c)f(a) + f(b) - f(c)], \forall a, b, c > 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} (bc - a)(b - c)[f(b) - f(a) - (a - b)f(c)] \\ = (a - b)(c - ab)[(b - c)f(a) + f(b) - f(c)], \forall a, b, c > 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (3), cho $c = 2$, ta được:

$$\begin{aligned} (2b - a)(b - 2)[f(b) - f(a) - (a - b)f(2)] \\ = (a - b)(2 - ab)[(b - 2)f(a) + f(b) - f(2)], \forall a, b > 1 \\ \Rightarrow (b - 2)(1 - ab + b^2)af(a) + (-1 - a + b)(a - 2)bf(b) \\ = -2(a - b)(b^2 - 2b + a - 1)f(2), \forall a, b > 1 \quad (4) \end{aligned}$$

Ta chọn $a = \frac{b^2+1}{b}$, khi đó (4) suy ra:

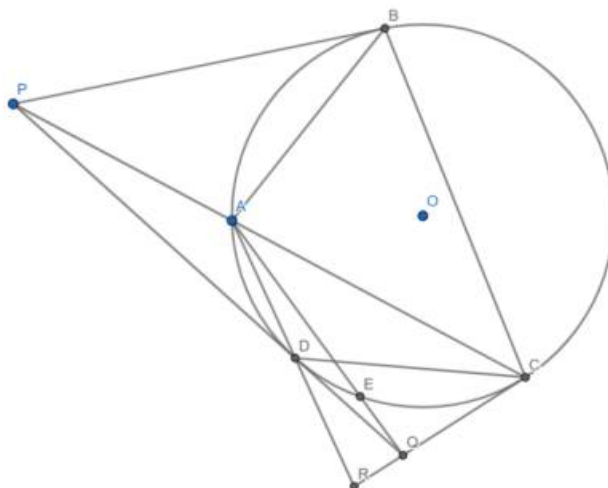
$$\begin{aligned} \frac{(b - 1)^2 f(b)(b + 1)}{b} &= \frac{-2f(2)}{b^2} (b - 1)^2 (b + 1), \forall b > 1 \\ \Rightarrow f(b) &= \frac{k}{b}, \forall b > 1 \end{aligned}$$

Thử lại, $f(x) = \frac{k}{x}, \forall x > 1$ thỏa mãn với mọi k thực.

Tóm lại: $f(x) = \frac{k}{x}, \forall x > 1, k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B và D cắt nhau tại điểm P trên tia AC. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt đường thẳng PD, AD lần lượt tại Q và R. Đường thẳng AQ cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng ba điểm B, E, R thẳng hàng.

*Giải:



Tứ giác BADC có các tiếp tuyến B, D trên (O) và AC đồng quy, nên BADC là tứ giác điều hoà.

$$\Rightarrow C(CADB) = -1$$

$$\Rightarrow C(ARDB) = -1$$

$$\Rightarrow B(ARDC) = -1(1) \text{ (do } A, D, R \text{ thẳng hàng)}$$

Tương tự: ADEC cũng là tứ giác điều hoà.

$$\Rightarrow B(AEDC) = -1$$

$$\Rightarrow B(AEDC) = -1(2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra được: B, E, R thẳng hàng (đpcm).

Câu 6: Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

*Giải:

Nhận xét: $x = 0$ không thoả mãn đề bài

Vì x là số hữu tỉ nên tồn tại 2 số nguyên a, b mà $b > 0, (a; b) = 1$ thoả mãn:

$$x = \frac{a}{b}$$

Khi đó, khi x thoả mãn đề bài thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$k^2 = x^2 + x + 6 = \frac{a^2 + ab + 6b^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + 6b^2 = (kb)^2$$

$$\Rightarrow (2a + b)^2 + 23b^2 = 4(kb)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{b} + 1\right)^2 + 23 = 4k^2$$

Nếu $2a$ không chia hết cho b thì $\left(\frac{2a}{b} + 1\right)^2 + 23$ không là số nguyên, không thoả mãn.

Do vậy, $2a : b$. Nên, $2x$ là số nguyên.

Như vậy: $(2x + 1)^2 + 23 = (2k)^2$

$$\Rightarrow (2k - 2x - 1)(2k + 2x + 1) = 23$$

Vì $k \in \mathbb{N}^*$, $2x \in \mathbb{Z}$, do đó ta xét hai trường hợp:

+) TH1: $2k - 2x - 1 = 23$ và $2k + 2x + 1 = 1$

$$\Rightarrow k = 6, x = -6$$

Thử lại thoả mãn.

+) TH2: $2k - 2x - 1 = 1$ và $2k + 2x + 1 = 23$

$$\Rightarrow k = 6, x = 5$$

Thử lại thoả mãn.

Tóm lại: $x = -6$ và $x = 5$ là các số hữu tỷ thoả mãn đề bài.

III. Nhận xét chung:

- Nhìn chung, đề thi không sát đối với các dạng đề của VMO, và có thể nói là khuôn mẫu, đơn giản. Chẳng hạn, câu dãy số của đề là một bài toán có công thức hần hoi, do đó gần như chắc chắn các học sinh sẽ tính toán được một cách đơn giản. Câu 2,3 của đề chỉ thiên nặng về tính toán, biến đổi chứ không cần quá nhiều đầu óc. Câu hình sử dụng bỏ đề chùm điều hoà cơ bản, khá lộ và ngắn nên cũng sẽ không phải là một thách thức lớn đối với các học sinh. Riêng câu 6, không phù hợp với trình độ của HSGQG.
- Điểm sáng hiếm hoi của đề là câu 4, phương trình hàm. Với việc chặn mất số 1, các học sinh sẽ gặp nhiều khó khăn khi tính toán. Thậm chí, khi tìm ra được phương án thêm biến thì độ phức tạp trong các phép biến đổi sau đó hoàn toàn có thể đẩy học sinh về sai đáp án.