

Bài 1 (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi
$$\begin{cases} a_1 = 2025 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng $n + 2024 \leq a_n \leq 2024 + n + \ln n, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Đặt $v_n = a_n - n - \ln n, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (3,5 điểm)

Cho số nguyên tố $p > 3$. Chứng minh rằng mọi ước số tự nhiên lớn hơn 1 của số $\frac{2^p + 1}{3}$ đều có dạng $2kp + 1, k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3 (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa $f(x-y) = f(x) \left(1 - \frac{y}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ với mọi x, y mà $x > y > 0$.

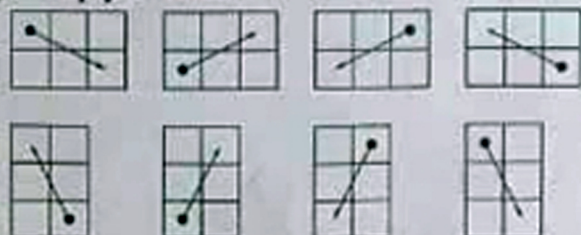
Bài 4 (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB > AC$ và đường cao AH , gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác ABC , đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC và các tia AC, AB theo thứ tự tại D, E, F ; đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại M khác D , (I) cắt MB, MC lần lượt tại X, Y khác M ; EF cắt MB tại K và cắt MC tại L ; DK, DL cắt (I) lần lượt tại P, Q khác D .

1. Gọi S là giao điểm của PQ và EF , vẽ đường kính DD' của (I) , $D'S$ cắt lại (I) tại N khác D' . Chứng minh ND đi qua trung điểm của AH .
2. Gọi U là giao điểm của BP và CQ , V là giao điểm của BQ và CP và Z là giao điểm của BY và CX . Chứng minh các điểm U, V, Z thẳng hàng.

Bài 5 (3,5 điểm)

Cho bàn cờ 10×10 (ô vuông). Điền các số tự nhiên từ 1 đến 100 vào các ô vuông trên bàn cờ sao cho mỗi ô vuông nhận đúng một số và hai ô bất kỳ khác số với nhau. Đặt một quân Mã vào ô nào đó của bàn cờ sao cho quân Mã không kề với biên. Bạn An muốn chơi một trò như sau, đó là di quân Mã một số bước để đến ô vuông kề trên với ô ban đầu mà nó đứng, và mỗi bước đi của quân Mã từ ô x đến ô y , ta hoán đổi hai số tại hai ô đó cho nhau. Biết rằng mỗi bước đi của quân Mã, thực hiện theo một trong các quy tắc sau:



1. Chứng minh rằng số bước đi quân Mã của bạn An phải là một số lẻ.
2. Hỏi liệu bạn An có thể chơi sao cho trên bàn cờ chỉ có 3 ô bị thay đổi số?