

Lời giải: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$

Gợi ý: Ta có $A^2 = 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 6 + 2(\sqrt{3} - 1) = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow A = \sqrt{3} + 1$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 16}}{x^3 - 5x^2 + x - 1}$ khi $x = 3 + \sqrt{2}$

Gợi ý: Ta có $x = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$. Do đó $M = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 7 + 9}}{x^2(x^2 - 6x + 7) + x^2 - 6x + 7 - 8} = \frac{-3}{8}$

Câu 3: Cho 5 chữ cái C, O, V, I, D để biểu thị 5 chữ số khác nhau và khác 0. Tổng của 5 số COVID, DCOVI, IDCOV, VIDCO, OVIDC là 277775. Tính $C + O + V + I + D$.

Gợi ý: Ta có $11111(C + O + V + I + D) = 277775 \Leftrightarrow C + O + V + I + D = 25$

Câu 4: Để tổ chức kỳ thi học sinh giỏi lớp 9, Hội đồng thi X dự định sắp xếp mỗi phòng thi 15 thí sinh thì thừa ra 2 em. Nếu bớt đi một phòng thi thì tất cả thí sinh dự thi vừa đủ chia đều cho các phòng còn lại. Hội đồng thi X có tất cả bao nhiêu thí sinh dự thi. Biết rằng các thí sinh dự thi các môn khác nhau có thể ngồi cùng một phòng và mỗi phòng thi không được xếp quá 22 thí sinh.

Gợi ý: Gọi số phòng thi là a , số học sinh dự thi là b ($a, b \in \mathbb{N}$, $a > 1$, $b > 17$)

Ta có $b = 15a + 2$ và $b : (a - 1) \Rightarrow (15a + 2) : (a - 1) \Rightarrow (15a - 15 + 17) : (a - 1) \Rightarrow 17 : (a - 1)$

Xét $a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = 32 > 22$ (loại)

Xét $a - 1 = 17 \Leftrightarrow a = 18 \Rightarrow b = 272$. Vậy số thí sinh dự thi là 272

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a^2 + b^2 - 2ab - 8a + 2b + 12$

Gợi ý: Ta có $P = (a - b - 1)^2 + (a - 3)^2 + 2 \geq 2$. GTNN của P bằng 2. Đạt được khi $a = 3$; $b = 2$

Câu 6: Để đo khoảng cách từ chiếc thuyền đang đậu ở vị trí A đến bờ sông bên kia. Nam xác định các điểm B, C ở hai bờ sông sao cho A, B, C thẳng hàng và BC vuông góc với hai bờ sông (giả thuyết hai bờ sông song song với nhau), rồi chọn một điểm E ở bờ sông bên này (cùng bờ với Nam) (Hình vẽ bên).

Tiến hành đo được $BE = 90m$ và các góc $\widehat{BEA} = 30^\circ$;

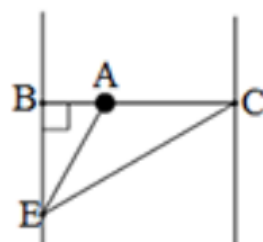
$\widehat{BEC} = 60^\circ$. Hỏi Nam tính được khoảng cách từ chiếc thuyền đến bờ sông bên kia bằng bao nhiêu?

Gợi ý: Ta có $AC = BC - AB = BE \cdot \tan 60^\circ - BE \cdot \tan 30^\circ = 60\sqrt{3}$ (m)

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+1) - y(y+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Gợi ý: Từ phương trình $x(x+1) - y(y+1) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0$

Từ đó giải được tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2} \right); (-2; 1); (1; -2) \right\}$

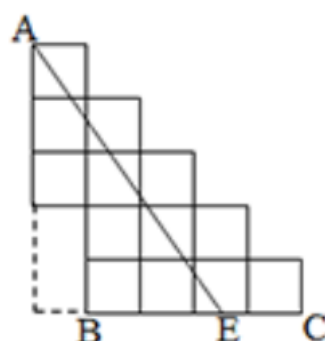
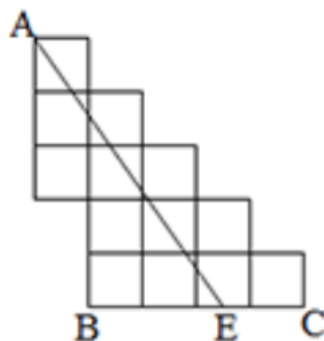


Câu 8: Cho đường thẳng (d): $y = (2m - 3)x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 4.

Gợi ý: Ta có $S_{AOB} = 4 \Rightarrow \frac{|OA| \cdot |OB|}{2} = 4 \Rightarrow |2m - 3| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{23}{16}; \frac{25}{16} \right\}$

Câu 9: Hình vẽ bên gồm 13 hình vuông đều có diện tích bằng 1cm^2 . Các điểm A, B, C là các đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên cạnh BC sao cho AE chia hình gồm 13 hình vuông bên thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn BE.

Gợi ý:



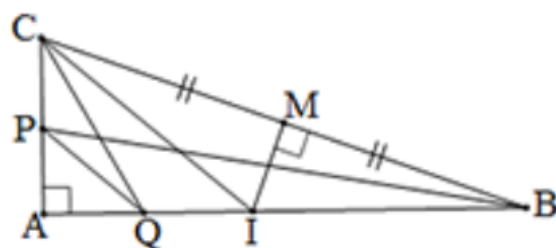
Kẻ tam giác vuông AHE như hình vẽ. Ta có $S_{AHE} = \frac{13}{2} + 2 = \frac{17}{2} \Rightarrow AH \cdot EH = 17 \Rightarrow EH = \frac{17}{5}$
 $\Rightarrow BE = \frac{17}{5} - 1 = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ (cm)}$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm P và Q lần lượt nằm trên cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABP} = 10^\circ$ và $\widehat{ACQ} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{PQA}$

Gợi ý: Gọi M là trung điểm BC. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AB tại I.

Khi đó $\widehat{ICB} = \widehat{IBC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ICQ} = 20^\circ$.

Suy ra BP là đường phân giác của ΔABC và CI là đường phân giác của ΔBCQ .



Ta có $\Delta IMB \sim \Delta CAB$ nên $\frac{BC}{IB} = \frac{AB}{MB}$

Lại có $\frac{QA}{QI} = \frac{CQ}{2QI} = \frac{BC}{2IB} = \frac{AB}{2MB} = \frac{AB}{BC} = \frac{PA}{PC}$ suy ra $PQ \parallel CI$ $\widehat{PQC} = \widehat{ICQ} = 20^\circ$

Do đó $\widehat{PQA} = 40^\circ$

II- PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: Giải phương trình $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = 9$

Giải: Ta có phương trình $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)^2 - 8(x^2 + 4x + 3) + 16 = 25 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 1 = 5 \\ x^2 + 4x - 1 = -5 \end{cases}$$

$$\text{Xét } x^2 + 4x - 1 = 5 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \sqrt{10} \\ x + 2 = -\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{10} \\ x = -2 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Xét } x^2 + 4x - 1 = -5 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{-2 - \sqrt{10}; -2 + \sqrt{10}; -2\}$$

Câu 12: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của AB. Lấy hai điểm D, E lần lượt trên cạnh AB, AC sao cho $BD < DA$, $AE < EC$ và $OD = OE$.

a) Chứng minh rằng $OA^2 - OD^2 = DA \cdot DB$

b) Gọi G, H, K lần lượt là trung điểm của đoạn BE, CD và ED. Chứng minh rằng $\widehat{KGH} = \widehat{EKH}$

Giải: a) Vì $MA = MB \Rightarrow OM \perp AB$.

$$\text{Ta có } OA^2 - OD^2 = (OM^2 + MA^2) - (OM^2 + MD^2)$$

$$= MA^2 - MD^2 = (MA + MD)(MA - MD)$$

$$= DA \cdot MA - DA \cdot (MB - DB) = DA \cdot DB$$

b) Gọi N là trung điểm của AC $\Rightarrow ON \perp AC$

Chứng minh tương tự câu a ta có $OA^2 - OE^2 = EA \cdot EC$
mà $OE = OD$ nên suy ra $DA \cdot DB = EA \cdot EC$ (*)

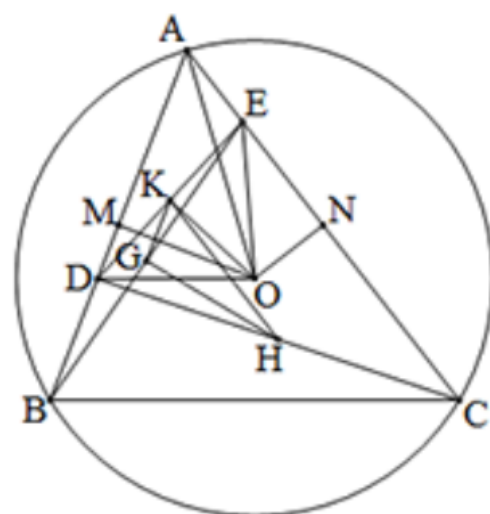
Mặt khác KG là đường trung bình của $\triangle BDE$,

KH là đường trung bình của $\triangle CDE$ nên từ (*) suy ra

$$\frac{DB}{EA} = \frac{EC}{DA} \Leftrightarrow \frac{2KG}{EA} = \frac{2KH}{DA} \Leftrightarrow \frac{KG}{EA} = \frac{KH}{DA}$$

Do $KG \parallel AB$, $KH \parallel AC$ nên $\widehat{GKH} = \widehat{DAE}$

Suy ra $\triangle GKH \sim \triangle EAD \Rightarrow \widehat{KGH} = \widehat{AED} = \widehat{EKH}$



Câu 13: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - xyz$

Giải: Áp dụng BĐT Cauchy ta có $1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 4\sqrt[4]{(xyz)^2 \cdot 2xyz} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2(xyz)^3} \leq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 2(xyz)^3 \leq \frac{1}{256} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{8}. \text{ Mặt khác } 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 2xy + z^2 + 2xyz$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2xy(z+1) + z^2 \Leftrightarrow (z+1)(z-1) \leq -2xy(z+1) \Leftrightarrow 0 < z \leq 1 - 2xy \quad (*)$$

Trong ba số x, y, z luôn tồn tại 2 số nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$ hay lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$

Giả sử $x, y \leq \frac{1}{2}$ hay $x, y \geq \frac{1}{2}$ suy ra $(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+2y-4xy \leq 1$. Nhân 2 vế của

bất đẳng thức này với BĐT (*) ta được

$$z(2x+2y-4xy) \leq 1-2xy \Leftrightarrow xy+yz+zx-xyz \leq \frac{1}{2} + xyz \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5}{8}$. Đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{2}$