

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
(Hướng dẫn chấm có 03 trang)

Câu	HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
5 (6,0đ)	Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $(x+y)^2 + (x+y) + 1$ chia hết cho xy. Chứng minh rằng khi đó $\frac{x(x+1) + y(y+1) + 1}{xy}$ là số nguyên tố.	
	Nhận xét ta cần chứng minh $\frac{x^2 + y^2 + x + y + 1}{xy}$ là số nguyên tố.	
	Ta có $(x+y)^2 + (x+y) + 1 = (x^2 + y^2 + x + y + 1) + 2xy$ chia hết cho xy nên suy ra $(x^2 + y^2 + x + y + 1)$ chia hết cho xy .	0,5
	Suy ra tồn tại số nguyên dương k sao cho $x^2 + y^2 + x + y + 1 = kxy$ (*) có nghiệm (x, y) với x, y nguyên dương.	0,5
	Không mất tổng quát gọi (x_0, y_0) là nghiệm của (*) thỏa $x_0 \geq y_0 \geq 1$ và $x_0 + y_0$ nhỏ nhất.	0,5
	Ta có $x_0^2 + y_0^2 + x_0 + y_0 + 1 = kx_0y_0 \Leftrightarrow x_0^2 + (1 - ky_0)x_0 + y_0^2 + y_0 + 1 = 0$. Suy ra phương trình $x^2 + (1 - ky_0)x + y_0^2 + y_0 + 1 = 0$ có nghiệm x_0 do đó còn một nghiệm x_1 sao cho $\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 - 1 & (1) \\ x_0x_1 = y_0^2 + y_0 + 1 & (2) \end{cases}$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $x_1 \in \mathbb{Z}^+$ nên cặp (x_1, y_0) cũng là nghiệm của (*). Theo cách chọn nghiệm ban đầu ta có $x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0 \Leftrightarrow x_1 \geq x_0$.	0,5
	Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - ky_0)x + y_0^2 + y_0 + 1$ có hai nghiệm $x_1 \geq x_0 \geq y_0$ nên ta có $f(y_0) \geq 0 \Leftrightarrow 2y_0^2 + 2y_0 + 1 - ky_0^2 \geq 0$.	0,5
	$\Leftrightarrow k \leq 2 + \frac{2}{y_0} + \frac{1}{y_0^2} \leq 5$ do $y_0 \geq 1$.	0,5
	Mặt khác ta có $k = \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_0 + y_0 + 1}{x_0y_0} \geq 2 + \frac{2}{\sqrt{x_0y_0}} + \frac{1}{x_0y_0} > 2$. (AM-GM).	0,5
	Vậy k chỉ có thể nhận các giá trị 3, 4, 5.	0,5
	Mặt khác nếu phương trình có nghiệm sao cho $y_0 \geq 3$ thì ta có $f(y_0) \geq 0 \Leftrightarrow 2y_0^2 + 2y_0 + 1 - ky_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 2 + \frac{2}{y_0} + \frac{1}{y_0^2} \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} < 3$ (loại).	0,5
	Từ đó suy ra $y_0 = 1; y_0 = 2$. Với $y_0 = 2$ ta có $\begin{cases} x_0 + x_1 = 2k - 1 \\ x_0x_1 = 7 \\ x_1 \geq x_0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$.	0,5

	Với $y_0 = 1$ ta có $\begin{cases} x_0 + x_1 = k - 1 \\ x_0 x_1 = 3 \\ x_1 \geq x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ x_0 = 1. \\ x_1 = 3 \end{cases}$ Thử lại thỏa mãn. Vậy $k = 5$.	0,5
6 (7,0đ)	Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{2024}{2023} \\ 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ a) Chứng minh rằng: $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. b) Chứng minh rằng: $\lim u_n = +\infty$. c) Tính $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 2}$.	
6a (2,0đ)	Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) bằng phương pháp quy nạp toán học $n = 1, u_1 = \frac{2024}{2023} > 1 \Rightarrow (1)$ đúng với $n = 1$.	0,5
	Giả sử (1) đúng với số tự nhiên $n = k$ ($k \geq 1$) ta có $u_k > 1$. Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ tức là phải chứng minh $u_{k+1} > 1$.	0,5
	Thật vậy: $u_{k+1} - 1 = \frac{u_k^2 + 2u_k}{2} - 1 = \frac{u_k^2 + 2(u_k - 1)}{2}$	0,5
	$\Rightarrow u_{k+1} - 1 > \frac{u_k^2}{2} > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow u_{k+1} - 1 > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 1$. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5
6b (3,0đ)	Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng. (2) Ta chứng minh (u_n) là dãy số không bị chặn trên. Giả sử phản chứng (u_n) là dãy số bị chặn trên. Do (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên nên (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim u_n = a$ vì $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta có $a \geq 1$. Từ định nghĩa $2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$ chuyển qua giới hạn ta có: $2a = a^2 + 2a \Rightarrow a = 0$. Mâu thuẫn với $a \geq 1$. Vậy (u_n) là dãy số không bị chặn trên. (3) Từ (2) và (3) suy ra $\lim u_n = +\infty$.	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
6c (2,0đ)	$\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có $2u_{k+1} = u_k(u_k + 2) \Leftrightarrow \frac{2}{u_k(u_k + 2)} = \frac{1}{u_{k+1}}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_k + 2} = \frac{1}{u_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_k + 2} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 2} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}$ $\Rightarrow \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 2} = \lim \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{2023}{2024}$.	0,5
		0,5
		0,5
		0,5

7 (7,0đ)	Có ba thầy giáo T_1, T_2, T_3 cùng dạy bồi dưỡng cho hai bạn S_1, S_2 để tham gia cùng một kì thi học sinh giỏi. Để khích lệ tinh thần các bạn học sinh trước khi bước vào buổi thi các thầy chuẩn bị các phần quà như sau: thầy T_1 chuẩn bị $2n$ quyển tập giống nhau, thầy T_2 chuẩn bị $2n$ cây bút giống nhau, thầy T_3 chuẩn bị $2n$ cây thước giống nhau (n là một số nguyên dương) để thưởng cho hai bạn học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia tất cả các phần quà của ba thầy giáo cho hai bạn học sinh để số lượng quà của hai bạn đó nhận được là bằng nhau?	
	Nhận xét: Ta chỉ cần đếm số cách nhận quà của học sinh thứ nhất S_1 .	
	Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số lượng quà S_1 nhận được từ T_1, T_2, T_3 . Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 3n$	0,5
	với điều kiện $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2n$ (*).	0,5
	Xét bài toán: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3n \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$	0,5
	Ta có số nghiệm của (1) là C_{3n+2}^2 .	0,5
	Khi đó, nếu tồn tại $x_k > 2n, k \in \{1; 2; 3\}$ thì bài toán này sẽ vi phạm điều kiện (*) nên ta xét lại các trường hợp vi phạm này.	
	TH1: Nếu x_1, x_2, x_3 cùng lớn hơn $2n$ thì $x_1 + x_2 + x_3 > 6n$. Trường hợp này không xảy ra.	0,5
	TH2: Nếu x_i, x_j cùng lớn hơn $2n, \forall i, j \in \{1; 2; 3\}, i \neq j$ khi đó $x_1 + x_2 + x_3 > 4n$. Trường hợp này không xảy ra.	0,5
	TH3: Nếu duy nhất $x_1 > 2n \Rightarrow x_1 \geq 2n+1$. Đặt $y_1 = x_1 - (2n+1), y_1 \geq 0$. Xét bài toán $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3n \\ x_2, x_3 \geq 0; x_1 \geq 2n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + x_2 + x_3 = n-1 \\ y_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$	0,5
	Ta có số nghiệm của (2) là C_{n+1}^2 .	0,5
	TH4: Nếu duy nhất $x_2 > 2n \Rightarrow x_2 \geq 2n+1$. Đặt $y_2 = x_2 - (2n+1), y_2 \geq 0$. Xét bài toán $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3n \\ x_1, x_3 \geq 0; x_2 \geq 2n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_2 + x_3 = n-1 \\ x_1, y_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$	0,5
	Ta có số nghiệm của (3) là C_{n+1}^2 .	0,5
	TH5: Nếu duy nhất $x_3 > 2n \Rightarrow x_3 \geq 2n+1$. Đặt $y_3 = x_3 - (2n+1), y_3 \geq 0$. Xét bài toán $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3n \\ x_1, x_2 \geq 0; x_3 \geq 2n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + y_3 = n-1 \\ x_1, x_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (4)$	0,5
	Ta có số nghiệm của (4) là C_{n+1}^2 .	0,5
	Tổng số nghiệm của các trường hợp từ 1 đến 5 là: $3C_{n+1}^2$.	0,5
	Vậy số cách chia quà thỏa mãn đề bài bằng $C_{3n+2}^2 - 3.C_{n+1}^2$.	0,5

Lưu ý: Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

---HẾT---