

ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH MÔN: TOÁN CHUYÊN

Ngày thi: 15/06/2024

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (6,0 điểm)

1). Giải phương trình $x^3 + x = 2(x + 1)\sqrt{2x + 1}$.

2). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2xy = 3 \\ x^2 + 2y^2 - 4y = 2 \end{cases}$$

Bài 2. (3,0 điểm)

a). Với mỗi số nguyên dương n , đặt $A_n = 22 + n^{203} + n^{2024}$ và $a_n = 1 + n + n^2$. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho A_n chia hết cho a_n .

b). Cho đa thức $P(x) = x^2 - 2bx + c$ với b, c là các số nguyên dương. Tìm các cặp (b, c) sao cho các số $P(1), P(2), P(3)$ đều là số nguyên tố.

Bài 3. (2,0 điểm) Xét x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - \frac{11}{6}xyz$.

Bài 4. (7,0 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) đường kính BC , điểm A thuộc tia đối của tia BC . Kẻ tiếp tuyến AM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Lấy điểm E di động trên cung nhỏ BM (E khác B và M). Tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Gọi I là trung điểm của EF .

a) Chứng minh $MIA = 2AMB$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên BC , K là giao điểm của EF và MH . Chứng minh $AK \cdot AI = AE \cdot AF$.

c) Lấy điểm P thuộc tia MH sao cho $MPE = MOB$. Chứng minh rằng đường thẳng PF luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên cung nhỏ BM .

Bài 5. (2,0 điểm) Cho $S = \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$. Giả sử k là số tự nhiên thỏa mãn mọi tập con gồm k phần tử của S đều chứa ít nhất 4 số đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $k \geq 1485$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

1). Giải phương trình $x^3 + x = 2(x + 1)\sqrt{2x + 1}$.

Đk: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}x^3 + x &= 2(x + 1)\sqrt{2x + 1} \\ \Leftrightarrow x^3 + x &= (\sqrt{2x + 1})^3 + \sqrt{2x + 1} \\ \Leftrightarrow [x^3 - (\sqrt{2x + 1})^3] + (x - \sqrt{2x + 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{2x + 1})[x^2 + x\sqrt{2x + 1} + 2x + 1 + 1] &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Do } x^2 + x\sqrt{2x + 1} + 2x + 1 + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2x+1}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x + 1) + 1 > 0 \forall x \geq -\frac{1}{2}$$

Suy ra $x - \sqrt{2x + 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1 + \sqrt{2}$.

2). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2xy = 3 \\ x^2 + 2y^2 - 4y = 2 \end{cases}$

Trừ vế hai phương trình ta được

$$\begin{aligned}x^2 - 3y^2 - 2xy + 4y &= 1 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) - (4y^2 - 4y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 - (2y - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y - 2y + 1)(x - y + 2y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3y + 1)(x + y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ x = 1 - y \end{cases}\end{aligned}$$

TH1: $x = 3y - 1$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned}(3y - 1)^2 + 2y^2 - 4y &= 2 \\ \Leftrightarrow 11y^2 - 10y - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -\frac{1}{11} \Rightarrow x = -\frac{14}{11} \end{cases}\end{aligned}$$

TH2: $x = 1 - y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned}(1 - y)^2 + 2y^2 - 4y &= 2 \\ \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2; 1); \left(-\frac{14}{11}; -\frac{1}{11}\right); \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 2

a). Với mỗi số nguyên dương n , đặt $A_n = 22 + n^{303} + n^{2024}$ và $a_n = 1 + n + n^2$. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho A_n chia hết cho a_n .

Lời giải

Trường hợp 1: $n = 1 \Rightarrow A_1 = 24, a_1 = 3 \Rightarrow A_1 : a_1 \Rightarrow n = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp $2n \neq 1$.

Ta có $(n^{2034} - n^2) : (n^3 - 1) \Rightarrow n^{2044} - n^2 = 0 \pmod{(n^3 - 1)}$

$(n^{203} - n) : (n^3 - 1) \Rightarrow n^{2023} - n = 0 \pmod{(n^3 - 1)}$

Bài toán đưa về tìm n để $(n^2 + n + 22) : (n^2 + n + 1)$

$\Leftrightarrow (n^2 + n + 1) \in U$

$\Leftrightarrow (n^2 + n + 1) \in \{1, 3, 7, 21\}$

$\Leftrightarrow n \in \{1, 2, 4\}$.

Vậy $n \in \{1, 2, 4\}$ là các giá trị cần tìm.

b). Cho đa thức $P(x) = x^2 - 2bx + c$ với b, c là các số nguyên dương. Tìm các cặp (b, c) sao cho các số $P(1), P(2), P(3)$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

b) Ta có $P(1) = 1 - 2b + c, P(2) = 4 - 4b + c, P(3) = 9 - 6b + c$

Ta thấy $P(1), P(3)$ cùng tính chất chẵn lẻ

Trường hợp 1.

$$P(1) = P(3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2b + c = 2 \\ 9 - 6b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2b = 1 \\ 6b - c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Suy ra $P(2) = 1$ (loại).

Trường hợp 2.

$$P(2) = 2 \Rightarrow 4b - c = 2 \Rightarrow c = 4b - 2$$

$$\text{Ta có } P(1) = 26 - 1; P(3) = 7 - 2b$$

$$\text{Ta có } P(1) > 0, P(3) > 0 \Rightarrow 1,5 < b < 3,5 \Rightarrow b \in \{2; 3\}$$

$$\text{Với } b = 2 \Rightarrow P(1) = 3, P(3) = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Với } b = 3 \rightarrow P(1) = 5, P(3) = 1 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } b = 2, c = 6.$$

Bài 3

Trong 3 số $x - \frac{1}{3}; y - \frac{1}{3}; z - \frac{1}{3}$ có ít nhất hai số cùng dấu.

Giả sử $x - \frac{1}{3}; y - \frac{1}{3}$ cùng dấu.

Suy ra

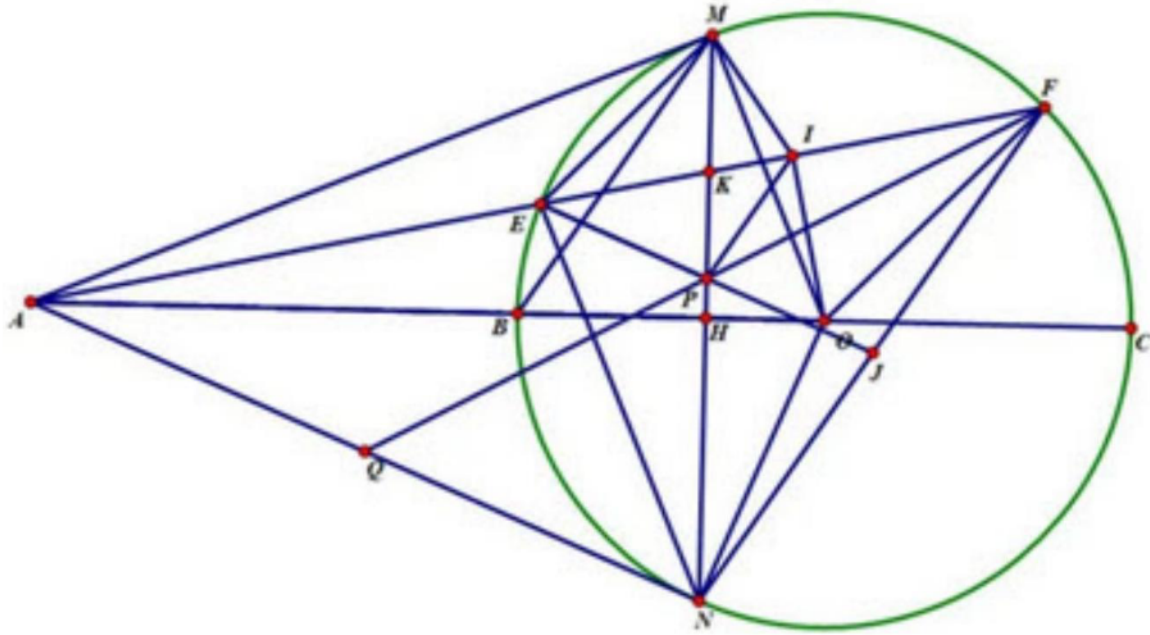
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow xy - \frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{9} \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq \frac{1}{3}(x + y) - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}(1 - z) - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}z$$

$$P = z(x + y) + xy - \frac{11}{6}xyz \leq z(1 - z) + \frac{(x + y)^2}{4} - \frac{11}{6}z\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3}z\right)$$

$$P \leq z - z^2 + \frac{(1-z)^2}{4} - \frac{11}{27}z + \frac{11}{18}z^2 = -\frac{5}{36}z^2 + \frac{5}{54}z + \frac{1}{4} \leq \frac{43}{162}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 4



a) Chứng minh $\angle MIA = 2 \angle AMB$.

Ta có $OM \perp AM \Rightarrow \angle AMO = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AO .

$OI \perp EF \Rightarrow \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AO .

Suy ra tứ giác $AMIO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .

Suy ra $\angle AIM = \angle AOM$

Mà trong đường tròn (O) ta có:

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOM \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc ở tâm cùng chắn một cung).}$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên BC , K là giao điểm của EF và MH . Chứng minh $AK \cdot AI = AE \cdot AF$.

Xét $\triangle AKH$ và $\triangle AOI$ Ta có $\angle KHO = \angle KIO = 90^\circ$; $\angle KAH$ chung

$$\text{suy ra } \triangle AKH \sim \triangle AOI \Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AH}{AI} \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO.$$

Lại có $\triangle AMO$ vuông tại M có $MH \perp OA$ tại H nên $AH \cdot AO = AM^2$.

Xét $\triangle AME$ và $\triangle AFM$ có $\angle MAF$ chung và $\angle AME = \angle AFM$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung).

$$\text{Suy ra } \triangle AME \sim \triangle AFM \Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE \cdot AF$$

Từ (1) (2) và (3) $\rightarrow AK \cdot AI = AE \cdot AF$.

c) Lấy điểm P thuộc tia MH sao cho $MPE = \angle MOB$. Chứng minh rằng đường thẳng PF luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên cung nhỏ BM .

Gọi N là điểm đối xứng với M qua H ta chứng minh được AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Gọi J là giao điểm của EP và FN

Ta có $MPE = MOB = MIE$ suy ra tứ giác $MIPE$ nội tiếp

Suy ra $EIP = EMP = EMN = ENF = ENJ \rightarrow IP // FJ \rightarrow P$ là trung điểm của EJ .

Gọi Q là giao điểm của FP và AN .

Ta có $MPE = MOB = \frac{1}{2}MON = MNA \rightarrow EP // AN$

$$\rightarrow \frac{EP}{AQ} = \frac{FP}{FQ} = \frac{PJ}{QN}$$

Mà P là trung điểm của EJ nên $PE = PJ \rightarrow QA = QN \Rightarrow Q$ là trung điểm của AN .

Vậy đường thẳng FP đi qua điểm Q cố định.

Bài 5

Xét ba số (a, b, c) đôi một nguyên tố cùng nhau. Thì ta có số các số chia hết cho ít nhất một trong ba số thuộc tập S là:

$$T = \left\lfloor \frac{2024}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{c} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{ab} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{bc} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{ca} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{abc} \right\rfloor$$

Ta có thể chỉ ra:

$$\begin{aligned} T &\leq \left\lfloor \frac{2024}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{2.3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{3.5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{5.2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{2.3.5} \right\rfloor \\ &\Rightarrow T \leq 1012 + 674 + 404 - 337 - 134 - 202 + 67 = 1484 \end{aligned}$$

Với $k \leq 1484$ thì có một tập hợp con gồm k phần tử của S mà các phần tử là các bội của 2 hoặc 3 hoặc 5 không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $k \geq 1485$

+) Nếu trong một tập con nào đó của S không tồn tại một cặp số nguyên tố cùng nhau nào thì dễ thấy số phần tử của tập hợp đó nhỏ hơn 1485 (Không thỏa mãn)

+) Nếu trong một tập con nào đó của S không tồn tại một bộ ba số (a, b, c) nguyên tố cùng nhau mà chỉ có một bộ hai số (m, n) là hai số nguyên tố cùng nhau (mà trong tập đó không có ước nào của m hoặc n) thì số phần tử tối đa của tập đó là:

$$\left\lfloor \frac{2024}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{mn} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2024}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{6} \right\rfloor = 1012 + 674 - 337 = 1349 \text{ (Không thỏa mãn)}$$

Từ đó ta có tập con gồm k phần tử của S phải có một bộ ba số nguyên tố cùng nhau (a, b, c) (mà trong tập đó không có ước nào của a hoặc b hoặc c ta luôn chọn được như vậy do nếu có một ước a_1 nào đó của a thì ta thay a thành a_1 thì được bộ ba số (a_1, b, c) nguyên tố cùng nhau). Theo nhận định trên thì ta có số các số

chia hết cho ít nhất một trong ba số thuộc tập S là 1484. Do đó tồn tại một số d nguyên tố cùng nhau với cả ba số trên trong tập con đó. Khi đó bộ bốn số (a, b, c, d) đôi một nguyên tố cùng nhau.

Vậy $k \geq 1485$.