

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1: (6 điểm)

- a. Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$. Rút gọn P và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.
- b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18$.

Bài 2: (4 điểm)

- a. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases}$.
- b. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình sau:
$$x^4 + 36y^3 + 2025 = 0$$

Bài 3: (3 điểm)

- a. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a, b) để $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.
- b. Cho S là một tập hợp có 3 phần tử là ba số tự nhiên và thỏa mãn tính chất: Tổng của hai phần tử bất kỳ thuộc tập hợp S là một số chính phương. Hỏi ba phần tử của tập hợp S đều là các số tự nhiên lẻ có được không? Giải thích.

Bài 4: (6 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < BC < CA$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD. Kẻ DE vuông góc với BC tại E. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC, M là trung điểm của đoạn thẳng AK. Đường thẳng qua điểm E và song song với đường thẳng AK cắt đường tròn tâm D bán kính DE tại điểm N ($N \neq E$). Đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC cắt đường tròn tâm O đường kính AD tại điểm I ($I \neq A$).

- a. Chứng minh rằng $BCD = CBI$ và $CH = BE$.
- b. Dựng hình thang cân BMPC. Chứng minh rằng ba điểm P, N, E thẳng hàng.
- c. Chứng minh rằng 4 điểm B, N, C, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: (1 điểm) Xét tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2024$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4}{y^2(z+x)} + \frac{y^4}{z^2(x+y)} + \frac{z^4}{x^2(y+z)}$

ĐÁP ÁN

Bài 1:

a. ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$

$$P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$$

$$P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Ta có: } P = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \geq 2\sqrt{6} + 2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (TM)$$

b. Ta có $\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2+m-3) = 13-8m$

$$\text{Đề phương trình có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow m < \frac{13}{8}$$

$$\text{Theo hệ thức Vi - et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2+m-3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1+x_2) = 18$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (TM) \\ m = 5 (L) \end{cases}$$

Bài 2:

$$\text{a. } \begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 = 0 (L) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -y$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b. Ta có: $x^4 \equiv 0, 1 \pmod{4}$; $2025 \equiv 1 \pmod{4}$; $36y^3 \equiv 0 \pmod{4}$

$$\Rightarrow x^4 + 36y^3 + 2025 \equiv 1, 2 \pmod{4}$$

Vậy không tồn tại x, y nguyên để $x^4 + 36y^3 + 2025 = 0$

Bài 3:

a. Ta có: $a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$

$$\text{Để } a^4 + 4b^4 \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2ab + 2b^2 = 1 \\ a^2 + 2ab + 2b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + b^2 = 1 \\ (a+b)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } (a-b)^2 + b^2 = 1$$

$$\text{Mà } a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b = \pm 1 \\ a - b = \pm 1 \\ b = 0(L) \end{cases} \Rightarrow a = b = \pm 1$$

$$\text{Với } (a+b)^2 + b^2 = 1 \text{ tương tự tìm được } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

b. Giả sử $S = \{a, b, c\}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

Giả sử cả 3 số a, b, c lẻ, mà tổng hai số bất kì là một số chính phương nên ta có:

$$a + b = 4m_1^2$$

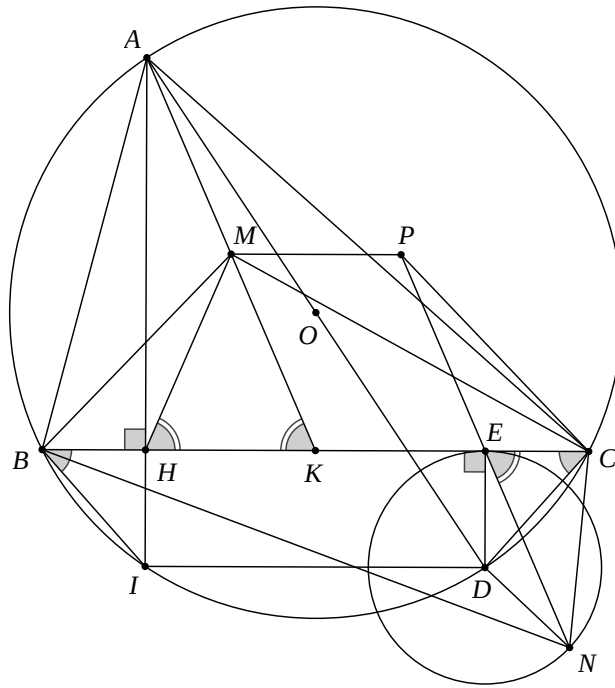
$$b + c = 4m_2^2$$

$$c + a = 4m_3^2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) : 2(VL)$$

Vậy giả sử sai.

Bài 4:



- a. Ta có $\angle AID = 90^\circ \Rightarrow AI \perp ID$ mà $AI \perp BC \Rightarrow BC \parallel DI$
 $\Rightarrow BCDI$ là hình thang nội tiếp (O) $\Rightarrow BCDI$ là hình thang cân $\Rightarrow \angle BCD = \angle CBI$
 $\Rightarrow \triangle BHI = \triangle CED$ (ch - gn) $\Rightarrow CE = BH \Rightarrow CH = BE$
- b. Ta có: $NE \parallel AK \Rightarrow \angle NEK = \angle AKE \Rightarrow \angle NEC = \angle AKH$
Mà $MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M $\Rightarrow \angle MHK = \angle MKH = \angle NEC$
Chứng minh được $\triangle BMH = \triangle CPE$ (cgc) $\Rightarrow \angle MHB = \angle PEC$
Mà
 $\angle MHB + \angle MHK = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle PEC + \angle NEC = 180^\circ$
 $\Rightarrow P, E, N$ thẳng hàng.
- c. Ta có: $\angle AMH = 2\angle MHK$ (Góc ngoài tam giác MHK cân tại M)
 $\angle NDE = 2\angle NEC$ (góc ở tâm và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)
 $\Rightarrow \angle AMH = \angle NDE \Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle EDN \Rightarrow EN.MH = ED.AH$
Mà $IH = ED \Rightarrow EN.MH = HI.HA$
Lại có: $HI.HA = HB.HC$ ($\triangle \sim$) $\Rightarrow HB.HC = EN.MH$
Mà $MH = EP$ ($\triangle =$) $\Rightarrow EN.EP = EC.EB \Rightarrow$ tứ giác BNCP nội tiếp
 $\Rightarrow 5$ điểm B, N, C, P, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5:

$$P = \frac{x^4}{y^2(z+x)} + \frac{y^4}{z^2(x+y)} + \frac{z^4}{x^2(y+z)}$$

$$P = \sum \frac{\frac{x^4}{y^2}}{x+y} \geq \frac{\left(\sum \frac{x^2}{y}\right)^2}{2(x+y+z)} \geq \frac{\left[\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}\right]^2}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{2} = 2012$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{2024}{3}$