

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút.

(Đề thi gồm 01 trang, 05 bài)

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{5 + \sqrt{x}} + \frac{2x}{25 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$. Chứng minh nếu $x > 81$

thì $A \geq 36$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm đều là số nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $12\sqrt{x+2} + \sqrt{51+15x} = 3x^2 + 2x + 17$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1+y^2)\sqrt{x-1} + y+1 = y^3 + y^2 + xy + x \\ x+4\sqrt{y+4} = 2\sqrt{x-1} + y+8 \end{cases}$$
.

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O). Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OA (C khác A và khác O). Gọi DE là dây cung thay đổi của đường tròn (O) nhưng luôn đi qua điểm C (DE khác AB). Các tia BD và BE cắt đường thẳng d theo thứ tự tại các điểm M và N .

a) Chứng minh tứ giác $DENM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và đường thẳng AB . Chứng minh F là điểm cố định và tích $AM \cdot AN$ không đổi khi dây cung DE của đường tròn (O) thay đổi.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DENM$. Xác định vị trí của dây cung DE để tổng $IB + IM$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^3 + b^2 + c} + \frac{1}{b^3 + c^2 + a} + \frac{1}{c^3 + a^2 + b}.$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x và y sao cho $2^x + 3^y$ là số chính phương.

b) Trong một hội nghị, các đại biểu đến từ n quốc gia, ngồi quanh một bàn tròn. Biết rằng với hai đại biểu cùng quốc gia bất kỳ thì người ngồi cạnh bên phải của họ luôn không cùng quốc gia. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu đại biểu?

----- HẾT -----

- Thí sinh làm bài trên giấy thi, không sử dụng tài liệu.

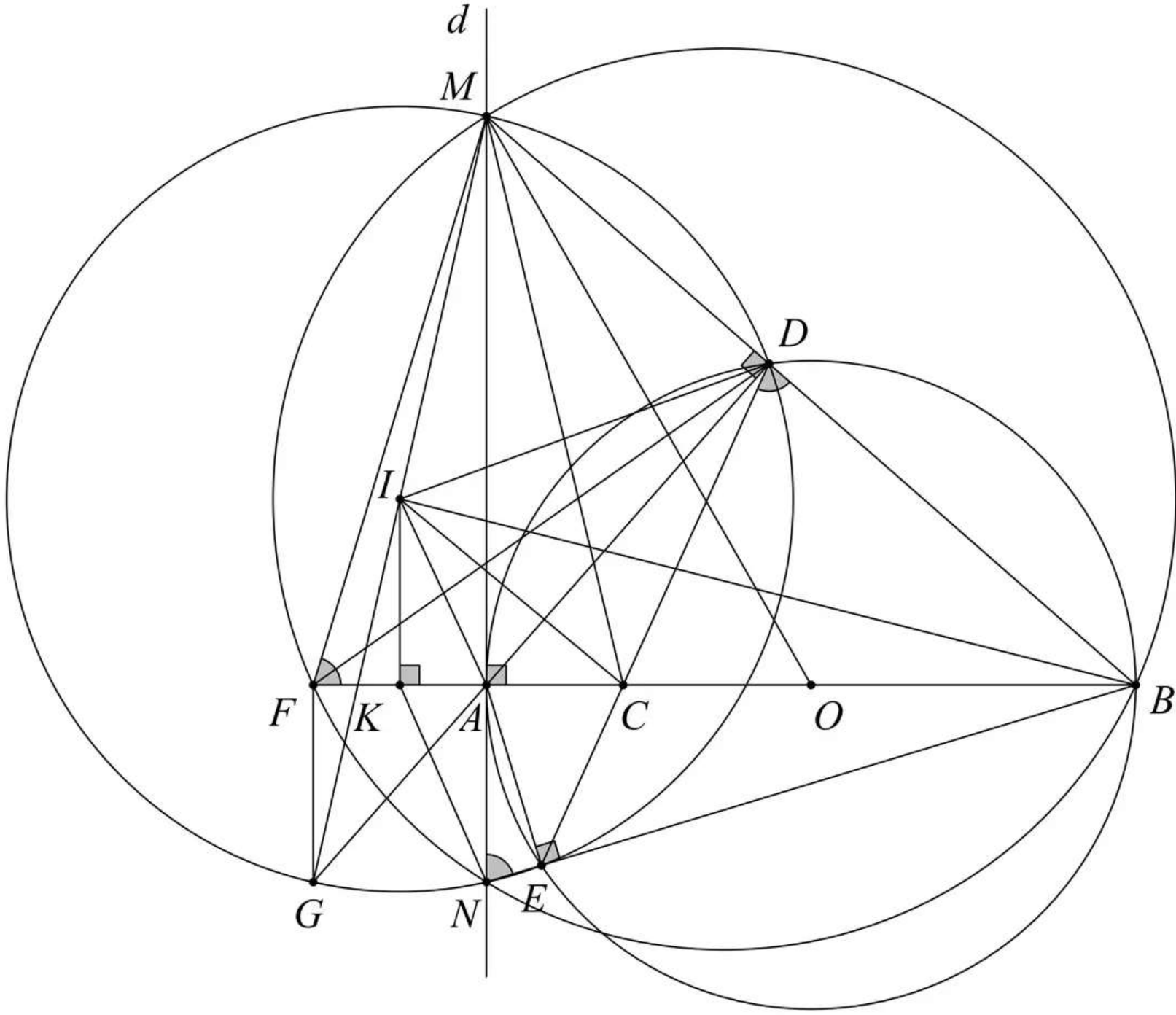
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2:

Bài	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	$A = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{2x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$ $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)-2x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)}$	0,25
	$= -\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)}{9-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-9}.$	0,25
	Nếu $x > 81$ thì $\sqrt{x}-9 > 0$. Do đó, $A = \sqrt{x}+9 + \frac{81}{\sqrt{x}-9} = \left(\sqrt{x}-9 + \frac{81}{\sqrt{x}-9} \right) + 18 \geq 2\sqrt{81} + 18 = 36$.	0,25
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x}-9 = \frac{81}{\sqrt{x}-9} \\ x > 81 \end{cases} \Leftrightarrow x = 324$.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	$\Delta = (m+1)^2 - 4(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8 \geq 0$ đúng $\forall m$.	0,25
	$x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2-2m+9}}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{m^2-2m+9} \in \mathbb{Z}$	0,25
	$\Leftrightarrow (m-1)^2 + 8 = a^2$ với $a \in \mathbb{Z}^+$ $\Leftrightarrow 8 = (a-m+1)(a+m-1)$	0,25
	Do $a > m-1$ nên $a-m+1$ và $a+m-1$ là hai số nguyên dương cùng tính chẵn lẻ, ngoài ra $a-m+1 \leq a+m-1$. $\Rightarrow \begin{cases} a-m+1=2 \\ a+m-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ m=2 \end{cases}$. Thử lại thỏa mãn.	0,25
2 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	Điều kiện xác định $x \geq -2$.	0,25
	Khi đó, phương trình đã cho tương đương với $4 \left[3\sqrt{x+2} - (x+4) \right] + \sqrt{51+15x} - (x+7) = 3(x^2-x-2)$ $\Leftrightarrow 4 \left[\frac{-x^2+x+2}{3\sqrt{x+2}+(x+4)} \right] + \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{51+15x}+(x+7)} - 3(x^2-x-2) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2-x-2) \left[\frac{4}{3\sqrt{x+2}+(x+4)} + \frac{1}{\sqrt{51+15x}+(x+7)} + 3 \right] = 0 (*)$	0,25

	Vì $x \geq -2$ nên ta có $\begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{x+2} + (x+4)} > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} > 0 \end{cases}.$ Suy ra, $\frac{4}{3\sqrt{x+2} + (x+4)} + \frac{1}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} + 3 > 0.$	0,25
	Do đó, phương trình (*) tương đương với $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$ Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1; 2\}$.	0,25
b) (1,0 điểm)		
	Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -4 \end{cases}.$	0,25
	Đặt $t = \sqrt{x-1}$ (với $x \geq 1$ thì $t \geq 0$), ta được hệ phương trình $\begin{cases} t^3 - y^3 + (t-1)y^2 - (y+1)t^2 = 0 & (1) \\ t^2 + 4\sqrt{y+4} = 2t + y + 7 & (2) \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow t^3 - (y+1)t^2 + (t-1)y^2 - y^3 = 0$ $\Leftrightarrow t^2(t-y-1) + y^2(t-y-1) = 0$ $\Leftrightarrow (t^2 + y^2)(t-y-1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = y = 0 \\ t = y + 1 \end{cases}$	0,25
	TH1. Với $t = y = 0$ thì phương trình (2) trở thành $8 = 7$ (vô lý). TH2. Với $t = y + 1$ thì phương trình (2) trở thành $(y+1)^2 + 4\sqrt{y+4} = 2(y+1) + y + 7$ $\Leftrightarrow y^2 = (\sqrt{y+4} - 2)^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{y+4} - 2 \\ y = -\sqrt{y+4} + 2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{y+4} + 1)(\sqrt{y+4} - 2) = 0 \\ (\sqrt{y+4} + 3)(\sqrt{y+4} - 2) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sqrt{y+4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y+4} = 2 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$ Với $y = 0$ thì $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S = \{(2; 0)\}$.	0,25

3 (3,0 điểm)		
	a) (1,0 điểm)	
	Ta có $ADB = AEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD \perp BM$ và $AE \perp BN$.	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AMB và ANB ta được $AB^2 = BD.BM = BE.BN$.	0,5
	Từ đó ta có tứ giác $DENM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét trong đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và do tứ giác $DENM$ nội tiếp nên ta có $MFB = MNB = CDB$.	0,25
	Từ đó tứ giác $CDMF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Suy ra $BD.BM = BC.BF = AB^2$ (không đổi).	0,25
	Vậy $BF = \frac{AB^2}{BC}$ không đổi. Mà B cố định, suy ra F cố định.	0,25
	Lại có $AF.AB = AM.AN$ mà AF, AB không đổi nên $AM.AN$ không đổi.	0,25
	c) (1,0 điểm)	
	Gọi r là bán kính của (I) thì $r^2 - IA^2 = AN.AM$ không đổi. Đặt $r^2 - IA^2 = AN.AM = a$. Ta cũng có $CD.CE = r^2 - IC^2 = CA.CB$ không đổi. Đặt $b = CD.CE = r^2 - IC^2$. Suy ra $IC^2 - IA^2 = a - b$.	0,25
	Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB . Theo định lý Pythagore ta có $a - b = IC^2 - IA^2 = (IC^2 - IK^2) - (IA^2 - IK^2) = CK^2 - AK^2 = (CK - AK)(CK + AK)$ không đổi. Từ đây kết hợp với $CK - AK = AC$ không đổi, suy ra $CK + AK$ cũng không đổi, hay CK và AK đều không đổi. Mà A và C cố định nên K cố định.	0,25

	Cách 2 để chứng minh K cố định. Kẻ đường kính MG của đường tròn (I). Ta có D, A, G thẳng hàng. Mặt khác $AD.AG = AM.AN = AF.AB$ nên tứ giác $BDFG$ nội tiếp. Suy ra $GF \perp BF$. Do $MA \parallel IK \parallel GF$ và I là trung điểm MG nên K là trung điểm FA. Mà F, A cố định nên K cố định.	
	Ta có $IB \geq KB$ không đổi. Dấu bằng xảy ra khi $I \equiv K$ tương ứng với $DE \perp AB$ tại C.	0,25
	Lại có $BA^2 = BD.BM = IB^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = IB^2 - BA^2$. Mà BA không đổi nên $r = IM$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IB nhỏ nhất. Vậy tổng $IM + IB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi DE vuông góc AB tại C.	0,25
4 (1,0 điểm)	(1,0 điểm)	
	Ta có $(a^3 + b^2 + c) \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right) \geq (a + b + c)^2$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^2 + c} \leq \frac{\frac{1}{a} + 1 + c}{(a + b + c)^2} = \frac{bc + 1 + c}{(a + b + c)^2}$ Tương tự suy ra $P \leq Q = \frac{(ab + bc + ca) + (a + b + c) + 3}{(a + b + c)^2}$.	0,25
	Ta chứng minh $Q \leq 1$ $\Leftrightarrow (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 3 \leq (a + b + c)^2$. $\Leftrightarrow (a + b + c) + 3 \leq (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)$	0,25
	Điều này đúng do $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq \sqrt[3]{abc}(a + b + c) = a + b + c \\ ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3 \end{cases}$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.	0,25
5 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	Giả sử $2^x + 3^y = z^2$ với $z \in \mathbb{Z}^+$. Xét theo mod 3 cả hai vế ta được $(-1)^x \equiv 0; 1 \pmod{3}$, suy ra x chẵn.	0,25
	Đặt $x = 2m, m \in \mathbb{Z}^+$, ta có phương trình $4^m + 3^y = z^2 \Leftrightarrow 3^y = (z + 2^m)(z - 2^m)$. Do đó tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $z + 2^m = 3^a, z - 2^m = 3^b$ và $a > b, a + b = y$.	0,25
	Suy ra $2^{m+1} = 3^a - 3^b = 3^b(3^{a-b} - 1)$. Do $2^{m+1} \not\equiv 3 \pmod{3}$ nên ta phải có $b = 0, a = y$. Như vậy $2^{m+1} = 3^y - 1$.	0,25
	Từ đó $3^y - 1 \vdots 4$ nên y chẵn. Đặt $y = 2n, n \in \mathbb{Z}^+$. Ta có $2^{m+1} = 3^{2n} - 1 = (3^n + 1)(3^n - 1)$. Vì ƯCLN $(3^n + 1; 3^n - 1) = 2$ nên ta phải có $3^n - 1 = 2, 3^n + 1 = 2^m$. Vậy $n = 1, m = 2$, suy ra $x = 4, y = 2$.	0,25

b) (1,0 điểm)		
Ta chứng minh có nhiều nhất n^2 đại biểu. Nếu có ít nhất $n^2 + 1$ đại biểu thì có quốc gia có ít nhất $n + 1$ đại biểu. $n + 1$ đại biểu này có $n + 1$ người ngồi cạnh bên phải, và do chỉ có n quốc gia nên chắc chắn có hai người cùng quốc gia, mâu thuẫn.		0,5
Tiếp theo ta chỉ ra cách sắp xếp thỏa mãn với n^2 đại biểu bằng quy nạp. Ta ký hiệu tất cả các đại biểu cùng quốc gia thứ i đều bằng số i . Với $n = 2$ ta sắp xếp theo dạng $(1, 1, 2, 2)$. Giả sử ta đã sắp xếp xong cho k quốc gia theo dạng $(a_1, a_2, \dots, a_{k^2})$, trong đó mỗi cặp cạnh nhau dạng (i, j) với $1 \leq i, j \leq k$ đều xuất hiện đúng một lần. Với $k + 1$ quốc gia, ta sắp xếp thỏa mãn bằng cách: -) Thay cặp (i, i) thành $(i, k + 1, i, i)$ với mọi $i = \overline{1, k - 1}$. -) Thay cặp (k, k) thành $(k, k + 1, k + 1, k, k)$. Kết luận: có nhiều nhất n^2 đại biểu. Cách 2: Một cách sắp xếp khác thỏa mãn với n^2 đại biểu là $(1, 1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, 2, 2, 3, 2, 4, \dots, 2, n, 3, 3, 4, 3, 5, \dots, 3, n, \dots, n - 1, n - 1, n, n)$.		0,5

Chú ý:- Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai ở câu nào thì không chấm điểm câu đó (vẽ hình sai ở đề bài chung thì không chấm điểm toàn bộ bài hình học).
- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình ở câu nào thì cho nửa số điểm của phần làm đúng trong câu đó.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.