

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 29/9/2020

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + m^3$ có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABO có diện tích bằng 32 (với O là gốc tọa độ).

Bài II (6 điểm)

1) Giải phương trình $x^3 + 1 = \sqrt{4x - 3} + \sqrt{2x - 1}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + y = x^2 + 2 \\ 8y^3 - 3y = 2x^2 - \sqrt[3]{2x^2 + y + 7} + 7 \end{cases}$$

Bài III (2 điểm)

Cho đa giác đều 30 đỉnh $A_1A_2 \dots A_{30}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 30 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ đồng thời không có cạnh nào là cạnh của đa giác.

Bài IV (3 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° .

1) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

2) Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và CC' .

Bài V (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 9); n = 1, 2, \dots$

1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số tăng.

2) Chứng minh $\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{2020} - 1} < \frac{1}{3}$.

Bài VI (2 điểm)

Với a, b, c là các số thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a - b)(b - c)(c - a)$.

..... Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

Hướng dẫn giải:

Bài I (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + m^3$ có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABO có diện tích bằng 32 với O là gốc tọa độ.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$. Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó

$$A(0; m^3), B(m; \frac{1}{2}m^3) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} |0 \cdot \frac{1}{2}m^3 - m \cdot m^3| = \frac{1}{2}m^4 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

Bài II (6 điểm)

1) Giải phương trình $x^3 + 1 = \sqrt{4x - 3} + \sqrt{2x - 1}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + y = x^2 + 2 \\ 8y^3 - 3y = 2x^2 - \sqrt[3]{2x^2 + y + 7} + 7 \end{cases}$$

Câu 1)

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= \sqrt{4x - 3} + \sqrt{2x - 1} \\ \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 2) + (2x - 1 - \sqrt{4x - 3}) + (x - \sqrt{2x - 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) + \frac{4(x - 1)^2}{2x - 1 + \sqrt{4x - 3}} + \frac{(x - 1)^2}{x + \sqrt{2x - 1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 \left[x + 2 + \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{4x - 3}} + \frac{1}{x + \sqrt{2x - 1}} \right] &= 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Câu 2)

Đặt $a = \sqrt[3]{2x^2 + y + 7} \Leftrightarrow 2x^2 + y + 7 = a^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 7 = a^3 - y$. Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành: $a^3 - y - a = 8y^3 - 3y \Leftrightarrow a^3 - a = 8y^3 - 2y(1)$.

Vì $y^3 + y = x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow a \geq 2$. Hàm số
 $f(t) = t^3 - t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 1 > 0, \forall t \geq 1$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(a) = f(2y) \Leftrightarrow a = 2y \Leftrightarrow 2x^2 + 7 = 8y^3 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{8y^3 - y - 7}{2}.$$

Thay ngược lại phương trình đầu có: $y^3 + y = \frac{8y^3 - y - 7}{2} + 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$.

Bài III (2 điểm)

Cho đa giác đều 30 đỉnh $A_1 A_2 \dots A_{30}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 30 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ đồng thời không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều đã cho?

Số tam giác có ba đỉnh của đa giác đều là C_{30}^3 .

Ba đỉnh được chọn ra là ba đỉnh của một tam giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác đều là $C_{30}^1 \cdot C_{26}^1$ (bước 1: chọn ra một cạnh của đa giác đều có C_{30}^1 cách; bước 2: chọn ra 1 trong 26 đỉnh không kề với đỉnh thuộc cạnh đã chọn có C_{26}^1 cách).

Ba đỉnh được chọn ra là ba đỉnh của một tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của đa giác đều là 30 (chọn hai cạnh kề nhau sẽ cho một tam giác thoả mãn).

Vậy có tất cả $C_{30}^3 - (C_{30}^1 C_{26}^1 + 30) = 3250$ tam giác thoả mãn.

Bài IV (3 điểm)

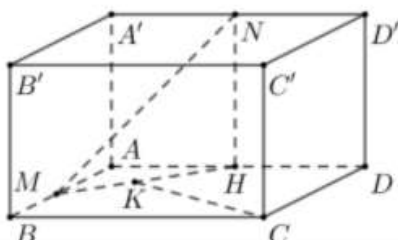
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° .

1) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

2) Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và CC' .

Câu 1) Gọi

$$H = h/c(N, (ABCD)) \Rightarrow \widehat{HMN} = (MN, (ABCD)) = 60^\circ \Rightarrow MN = \frac{HN}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



Câu 2) Kẻ

$$CK \perp HM, (K \in HM) \Rightarrow \begin{cases} CK \perp HM \\ CK \perp HN \end{cases} \Rightarrow CK \perp (MNH) \Rightarrow CK \perp MN \Rightarrow CK = d(CC',$$

Đặt $AM = x, AH = y$ ($0 \leq x, y \leq 1$) khi đó

$$CK = \frac{2S_{CHM}}{MH} = \frac{2(S_{ABCD} - S_{AMH} - S_{BMC} - S_{DCH})}{MH} = \frac{2 - xy - (1-x) - (1-y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x+y-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{Mặt khác } HM = HN \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra:

$$CK = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{1}{3} + 2xy} - xy \right) = \sqrt{6xy + 1} - \sqrt{3}xy = g(t) = \sqrt{6t + 1} -$$

Có $t = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{6}\right]$. Dễ có $\max_{\left[0; \frac{1}{6}\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{6}\right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Dấu bằng đạt tại $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy khoảng cách lớn nhất giữa hai đường thẳng MN, CC' bằng $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài V (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 9), n = 1, 2, \dots$

1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số tăng.

2) Chứng minh $\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{2020} - 1} < \frac{1}{3}$.

$$\text{Có } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = \frac{1}{2}(u_n - 3)^2 \geq 0(1).$$

Có $u_1 = 6 > 3$ giả sử $u_n > 3$, khi đó theo (1) có $u_{n+1} \geq u_n > 3$. Vì vậy theo nguyên lí quy nạp có $u_n > 3, \forall n = 1, 2, \dots$ Khi đó $u_{n+1} > u_n$ vì vậy dãy số đã cho là dãy tăng.

$$\text{Có } u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 3) = \frac{1}{2}(u_n - 1)(u_n - 3).$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{2}{(u_n - 1)(u_n - 3)} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}.$$

Vì vậy

$$\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{2020} - 1} = \sum_{n=1}^{2020} \left(\frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} \right) = \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_{2021} - 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{u_{2021} - 3} < \frac{1}{3}.$$

Bài VI (2 điểm)

Với a, b, c là các số thực thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a - b)(b - c)(c - a)$.

$$\text{Có } a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 6 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 12.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } P = xyz = x \frac{(y + z)^2 - (y^2 + z^2)}{2} = x \frac{x^2 - (12 - x^2)}{2} = g(x) = x(x^2 - 6).$$

$$\text{Mặt khác } 2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2 \Leftrightarrow 2(12 - x^2) \geq x^2 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Để có } \min_{[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]} g(x) = g(\sqrt{2}) = g(-2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-4\sqrt{2}$. Dấu bằng đạt tại $(x; y; z) = (\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và các hoán vị.