

Câu 1. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2022$

Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{(2022 + a^2)(2022 + b^2)(2022 + c^2)}{(a+b)^2 \cdot (b+c)^2 \cdot (c+a)^2}$

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2 - (m+3)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác không thỏa mãn giá

trị của biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ là một số nguyên.

Câu 3. (1,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số là các số nguyên. Biết rằng a, b, c là ba số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = P(b) = P(c) = 2022$. Hỏi phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên không? Vì sao?

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho: $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho A là một tập con của tập số tự nhiên N . Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi phần tử x thuộc $A (x \neq 1)$ luôn biểu diễn được dưới dạng $x = a + b$ trong đó a, b thuộc A (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất. Giải thích cách tìm?

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC . Gọi I là trung điểm cạnh BC , P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh $PB \cdot PC = PE \cdot PF$ và KE song song với BC ;

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q . Chứng minh tứ giác $BIQF$ nội tiếp.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho ba điểm A, B, C phân biệt theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Qua điểm B kẻ đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AC ; D là một điểm di động trên đường thẳng $d (D \neq B)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng d tại điểm E khác D . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên các đường thẳng AD và AE . Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng BQ và CD , S là giao điểm của hai đường thẳng BP và CE . Chứng minh:

a) Tứ giác $PQSR$ nội tiếp;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQSR$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm D di động trên đường thẳng d .

ĐÁP ÁN

Câu 1. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2022$

Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{(2022 + a^2)(2022 + b^2)(2022 + c^2)}{(a+b)^2 \cdot (b+c)^2 \cdot (c+a)^2}$

Ta có : $2022 + a^2 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$

Tương tự : $2022 + b^2 = (b+a)(b+c)$ $2022 + c^2 = (c+a)(c+b)$

Thay vào Q ta được $Q=1$

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2 - (m+3)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác không

thỏa mãn giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ là một số nguyên.

Ta có: $\Delta = (m+3)^2 - 4(m+1) = m^2 + 2m + 5 = (m+1)^2 + 4 > 0 (\forall m)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác 0 $\Leftrightarrow m \neq -1$

Áp dụng định lý Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+3 \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 2 = \left[\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}\right]^2 - 2 \\ &= \left(\frac{m^2 + 4m + 7}{m+1}\right)^2 - 2 = \left(m + 3 + \frac{4}{m+1}\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

Với m nguyên dương, biểu thức $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4 \mid (m+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=1 \\ m+1=2 \\ m+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0(km) \\ m=1(tm) \\ m=3(tm) \end{cases}$$

Vậy $m=1, m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 3, (1,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số là các số nguyên. Biết rằng a, b, c là ba số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = P(b) = P(c) = 2022$. Hỏi phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên không? Vì sao?

Ta có $P(a) = P(b) = P(c) = 2022 \Leftrightarrow P(a) - 2022 = P(b) - 2022 = P(c) - 2022 = 0$

Khi đó: a, b, c là 3 nghiệm phân biệt của đa thức $P(x) - 2022$.

Do đó, tồn tại đa thức $Q(x)$ có các hệ số là các số nguyên sao cho:

$$P(x) - 2022 = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x)$$

Giả sử, phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên $x = d$.

$$\text{Khi đó, } P(d) - 2023 = 0 \Leftrightarrow P(d) - 2022 = 1$$

$$\text{Ta lại có, } P(d) - 2023 = (d-a)(d-b)(d-c)Q(d)$$

$$\text{Vậy } (d-a)(d-b)(d-c)Q(d) = 1 = 1.1 = (-1).(-1).(*)$$

$d-a, d-b, d-c$ là 3 số nguyên phân biệt. $Q(d)$ là số nguyên.

$$\text{Do đó, từ } (*) \text{ suy ra } d-a \in \{-1; 1\}; d-b \in \{-1; 1\}; d-c \in \{-1; 1\}$$

Theo nguyên lý Đi-rich-lê thì có ít nhất 2 trong ba số $d-a; d-b; d-c$ bằng nhau.

Điều này mâu thuẫn với $d-a; d-b; d-c$ là 3 số nguyên phân biệt.

Vậy điều giả sử là sai.

Tóm lại: Phương trình $P(x) - 2023 = 0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các số nguyên tố a,b,c sao cho: $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$

$$\text{Th1: } a \neq 3; b \neq 3; c \neq 3$$

Vì a, b, c là các số nguyên tố nên khi đó

$$a^4 \equiv 1 \pmod{3}, b^4 \equiv 1 \pmod{3}, c^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Ta có } a^4 + b^4 + c^4 + 54 \equiv 0 \pmod{3}; 11abc \equiv 1 \pmod{3} \text{ hoặc } 11abc \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy trường hợp này không thỏa mãn

TH2: Trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 3

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 3$. Ta có :

$$3^4 + b^4 + c^4 + 54 = 33bc \Leftrightarrow b^4 + c^4 + 135 = 33bc (*)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 33bc \equiv 0 \pmod{3} \\ 135 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Mặt khác } b, c \text{ là các số nguyên tố nên } b^4 \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } b^4 \equiv 1 \pmod{3}; c^4 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{hoặc } c^4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{Vậy từ } b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow \begin{cases} b^4 \equiv 0 \pmod{3} \\ c^4 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } b, c \text{ là các số nguyên tố nên } b = c = 3$$

Thay $b = c = 3$ vào (*) ta thấy thỏa mãn

$$\text{Vậy } a = b = c = 3$$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho A là một tập con của tập số tự nhiên N . Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi phần tử x thuộc $A (x \neq 1)$ luôn

biểu diễn được dưới dạng $x = a + b$ trong đó a, b thuộc A (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất. Giải thích cách tìm?

Giả sử A có số phần tử là n , ta sắp xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 100$ (1)

Suy ra với mỗi $k \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$ ta có $x_{k+1} = x_i + x_j \leq x_k + x_k = 2x_k$, với $1 \leq i, j \leq k$ (2)

Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \leq 1+1=2; x_3 \leq 2+2=4; x_4 \leq 8, x_5 \leq 16, x_6 \leq 32, x_7 \leq 64$

Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử

Giả sử $n = 8 \Rightarrow x_8 = 100$

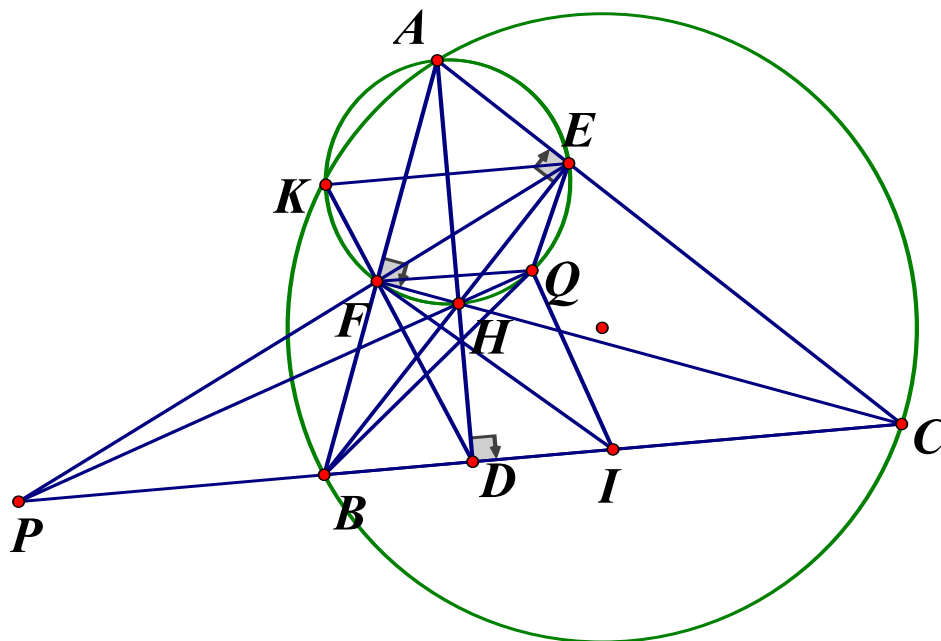
Vì $x_6 + x_7 \leq 32 + 64 = 96 < 100 \Rightarrow x_8 = 2x_7 = 50$

Vì $x_5 + x_6 \leq 16 + 32 = 48 < 50 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25$

Vì $x_4 + x_5 \leq 8 + 16 = 24 < 25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = 12,5$ (mâu thuẫn)

Với $n = 9$ ta có tập $A = \{1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm cạnh BC, P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K.



a) Chứng minh $PB \cdot PC = PE \cdot PF$ và KE song song với BC

Ta có: $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \triangle PFB \sim \triangle PCE (g.g) \Rightarrow PB \cdot PC = PE \cdot PF$ (1)

Các tứ giác $BFHD, HEKF$ nội tiếp nên :

$$\angle EBC = \angle HBD = \angle HFD = \angle HEK = \angle BEK \Rightarrow KE \parallel BC$$

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh tứ giác BIQF nội tiếp.

Xét $\triangle PHE$ và $\triangle PEQ$ có : $\angle HPE = \angle HPF; \angle PEH = \angle PQF$

$$\Rightarrow \triangle PHE \sim \triangle PFQ (g.g) \Rightarrow PH.PQ = PF.PE (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } PB.PC = PH.PQ \Rightarrow \frac{PB}{PH} = \frac{PQ}{PC}$$

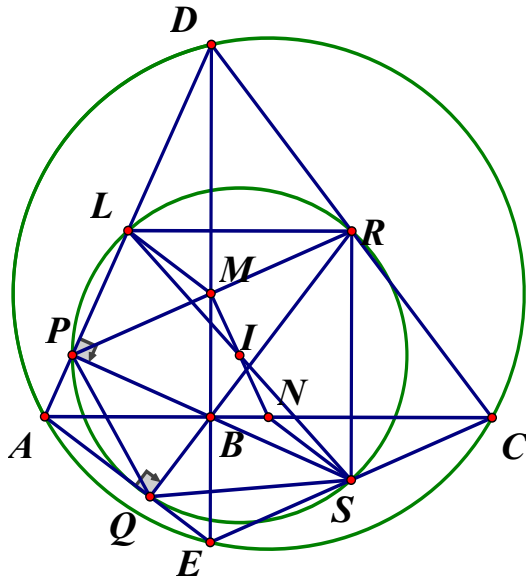
$$\text{Xét } \triangle PBQ \text{ và } \triangle PHC \text{ có : } \angle BPC = \angle HPC; \frac{PB}{PH} = \frac{PQ}{PC} \Rightarrow \triangle PBQ \sim \triangle PHC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle PQB = \angle PCH \Rightarrow BHQC \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\text{Khi đó } \angle FQB = \angle FQH + \angle HQB = \angle FEH + \angle HCB = 2\angle FCB = \angle FIB$$

Vậy tứ giác $BIQF$ là tứ giác nội tiếp

Câu 7. (2,0 điểm) Cho ba điểm A, B, C phân biệt theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Qua điểm B kẻ đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AC; D là một điểm di động trên đường thẳng d ($D \neq B$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng d tại điểm E khác D. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên các đường thẳng AD và AE. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng BQ và CD, S là giao điểm của hai đường thẳng BP và CE. Chứng minh:



a) Tứ giác PQSR nội tiếp

Do tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\angle ADE = \angle ACE \Rightarrow \angle SBC = \angle ABP = \angle ACE \Rightarrow SB = SC$

tương tự , ta có $\angle SEB = \angle SBE \Rightarrow SC = SE$ nên S là trung điểm CE

Cmtt R cũng là trung điểm CD

Do $RB = RC, SB = SC \Rightarrow \triangle SRB = \triangle SRC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle BSR = \angle CSR = \angle BEC = \angle BAP = \angle BQP \Rightarrow PQSR$ là tứ giác nội tiếp

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQSR luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm D di động trên đường thẳng d .

Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQSR$, gọi L là trung điểm của AD

Ta có : $RL \parallel AC, RS \parallel DE \Rightarrow \angle LRS = 90^\circ$

Suy ra LS là đường kính của đường tròn (I)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng DE, AC

Khi đó N là điểm cố định. Lại có $ML \parallel AE, NS \parallel AE$ và $ML = NS = \frac{1}{2} AE$ nên tứ giác

$MNLS$ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm MN

Mà $\angle MBN = 90^\circ$ nên $IN = IB$

Vậy I thuộc đường trung trực đoạn thẳng BN cố định