

Câu I (3,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

2. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m + 2)x + 3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt hai trục $Ox; Oy$ lần lượt tại 2 điểm A và B sao cho tam giác AOB cân.

Câu II (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(4x^2 - 7x + 4)(3x^2 - 4x + 3) = 3x^2$

2. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 3m - 3 \\ mx + y = 2m - 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$
 Tìm các giá trị nguyên của m

để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$, trong đó $x; y$ là các số nguyên.

3. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một con Robot được lập trình để chuyển động thẳng đều trên một quãng đường từ điểm A đến điểm B theo quy tắc: Đi được 120cm thì dừng lại 1 phút, đi tiếp 240cm rồi dừng lại 2 phút, đi tiếp 360cm rồi dừng lại 3 phút..., tổng thời gian từ khi bắt đầu di chuyển từ A cho đến B là 253 phút. Tính quãng đường từ A đến B biết vận tốc của Robot không đổi là 40cm/phút.

Câu III (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C cố định, qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với AC . Gọi K là điểm cố định nằm giữa O và B (K khác O và B), qua K vẽ dây cung ED bất kỳ của đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AE và AD với đường thẳng d . Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt tia AC tại điểm M (M khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) $\triangle AKD \sim \triangle AQM$.

c) $AK \cdot AM = AB \cdot AC$.

d) Khi dây ED thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường cố định.

Câu IV (1,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2-x)\sqrt{1-x} - y\sqrt{y-1} = 0 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$$

2. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a(a-1) + b(b-1) = ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{a^3 + b^3 + 2023(a+b) + 4}{ab}$

----- HẾT -----

Câu I (3,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	$A = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}$	0,5
	$A = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4$	0,5
2	Theo DL Viét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$	0,5
	$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{1^2 - 2 \cdot (-3)}{-3} = \frac{-7}{3}$	0,5
3	ĐK: $m \neq -2$ $\oplus A(\frac{-3}{m+2}; 0) \Rightarrow OA = \left \frac{-3}{m+2} \right = \frac{3}{ m+2 }$ $\oplus B(0; 3) \Rightarrow OB = 3$	0,5
	Ta có tam giác AOB cân tại O nên $OA = OB \Leftrightarrow \left \frac{3}{m+2} \right = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m+2} = 3 \\ \frac{3}{m+2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 (TM) \\ m = -3 (TM) \end{cases}$	0,25

Câu II (3,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	$(4x^2 - 7x + 4)(3x^2 - 4x + 3) = 3x^2 \quad (1)$ Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).	0,25
	Xét x khác 0, chia cả 2 vế của (1) cho x^2 ta được phương trình: $\left(4x - 7 + \frac{4}{x}\right)\left(3x - 4 + \frac{3}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow \left[4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7\right] \cdot \left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\right] = 3$	0,25
	Đặt $x + \frac{1}{x} = t$. Ta được phương trình: $(4t - 7)(3t - 4) = 3 \Leftrightarrow 12t^2 - 37t + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{25}{12} \end{cases}$	0,25
	* Với $t = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).	0,25

	$* \text{ Với } t = \frac{25}{12} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{25}{12} \Rightarrow 12x^2 - 25x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ . KL....}$	
2	$\begin{cases} x + my = 3m - 3 \\ mx + y = 2m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 3m - 3 \\ (m^2 - 1)x = 2m^2 - 5m + 3 \end{cases}$ Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$	0,25
	Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \frac{2m-3}{m+1} = 2 - \frac{5}{m+1} \\ y = 3 - \frac{5}{m+1} \end{cases}$	0,25
	Vì m nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là các số nguyên thì m + 1 phải là ước của 5 $\Rightarrow m + 1 \in \{1; -1; 5; -5\}$ $\Rightarrow m \in \{0; -2; 4; -6\} (TM) . \text{ KL...}$	0,25
3	Gọi số lần đi của Robot (theo quy luật đi rồi lại nghỉ) là x ($x > 1, x \in \mathbb{N}^*$) Thời gian đi của Robot theo quy luật là: $\frac{120}{40} + \frac{240}{40} + \frac{360}{40} + \dots + \frac{120x}{40} = 3 + 6 + 9 + \dots + 3x = \frac{3x(x+1)}{2} \text{ (phút)}$	0,25
	Thời gian nghỉ của Robot là: $1 + 2 + 3 + \dots + x - 1 = \frac{x(x-1)}{2} \text{ (phút)}$	0,25
	Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{3x(x+1)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 253 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 253 = 0$	0,25
	Giải phương trình tìm được: $x_1 = 11 (TM); x_2 = -\frac{23}{2} (KTM)$ Quãng đường từ A đến B là: $\frac{3.11.12}{2} . 40 = 7920 (cm)$	0,25

Câu III (3,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
a	$\widehat{BEP} + \widehat{BCP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \mid$ tứ giác $BEPC$ nội tiếp.	0,5
	$\Rightarrow \widehat{EPC} = \widehat{EBA}$ (vì cùng bù với $\widehat{EBC}$) $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE) $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{APQ} \Rightarrow$ Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp.	0,5
	Mà $\widehat{AMQ} = \widehat{APQ} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ADE} \Rightarrow \widehat{AMQ} = \widehat{ADK}$ $\Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta AQM$ ($\widehat{QAM}$ chung; $\widehat{ADK} = \widehat{AMQ}$)	0,5

c	$\Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta AQM \Rightarrow \frac{AK}{AQ} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow AK \cdot AM = AD \cdot AQ$	0,25
	Ta có: $\Delta ADB \sim \Delta ACQ$ ($\widehat{A}$ chung; $\widehat{ADB} = \widehat{ACQ} = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AQ} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AQ \Rightarrow AK \cdot AM = AB \cdot AC$	0,25
d	Ta có $AK \cdot AM = AB \cdot AC \Rightarrow AM = \frac{AB \cdot AC}{AK}$ (không đổi) M cố định.	0,25
	Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ thì ta có $IA = IM$ nên I nằm trên đường trung trực của AM cố định.	0,25

Câu IV (1,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	ĐKXĐ: $x \leq 1; y \geq 1$ $(1) \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1-x} - (y-1)\sqrt{y-1} + \sqrt{1-x} - \sqrt{y-1} = 0$ Đặt $\sqrt{1-x} = u$ ($u \geq 0$); $\sqrt{y-1} = t$ ($t \geq 0$) ta được phương trình: $u^3 - t^3 + u - t = 0 \Leftrightarrow (u-t)(u^2 + ut + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-t=0 \\ u^2 + ut + t^2 + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow u-t=0 \Rightarrow 1-x=y-1 \Leftrightarrow x=2-y.$	0,25
	Từ (2) suy ra $\sqrt{4-y} + \sqrt{y+1} = 3$ (ĐKXĐ: $1 \leq y \leq 4$) $\Rightarrow 5 + 2\sqrt{(4-y)(y+1)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{4+3y-y^2} = 2 \Rightarrow 3y-y^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ (KTM)} \\ y=3 \text{ (TM)} \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 3).$	0,25
2	Từ giả thiết $a(a-1) + b(b-1) = ab \Rightarrow a^2 + b^2 - (a+b) = ab$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = ab + a + b$ Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab + a + b \geq 2ab \Rightarrow a + b \geq ab$ (1) Lại có: $ab + a + b + 8 = (a^2 + 4) + (b^2 + 4) \geq 4a + 4b = 4(a+b)$ $\Rightarrow ab + 8 \geq 3(a+b) \geq 3ab$ (do (1)) $\Rightarrow ab \leq 4.$	0,25
	Đặt $t = \sqrt{ab} \Rightarrow 0 < t \leq 2 \Rightarrow \frac{2}{t} \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{t^2} \geq 1.$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $F = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 2023\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a}} + 2023 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} + \frac{4}{ab}$ $= 2t + 4046 \cdot \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2}$ $F \geq 2t + \frac{8}{t} + 2019 \cdot \frac{2}{t} + \frac{4}{t^2}.$ Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $2t + \frac{8}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{8}{t}} = 8$	0,25

	$\Rightarrow F \geq 8 + 2019 + 1 = 2028$. Vậy $\min F = 2028$, đạt khi $a = b = 2$.	
--	--	--

*** Chú ý:** Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.

----- **HẾT** -----