

TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU

ĐỀ THI MÔN : TOÁN (Chuyên)

Năm học: 2021-2022

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Giải phương trình $5x - (x+4)\sqrt{2x+1} + 4 = 0$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy + 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{x + y + 1} = 2 \end{cases}$$

Câu 2 (2, 0 điểm).

a) Cho hai đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = 3x^2 + 2ax + b (a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(xy-1)^2 = x^2 + y^2$.

Câu 3 (1, 0 điểm). Xét các số thực a, b, c không âm, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab}$.

Câu 4 (3, 0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Một đường tròn đi qua B, C và không đi qua A cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F (E khác B ; F khác C); BF cắt CE tại D . Gọi P là trung điểm của BC và K là điểm đối xứng với D qua P .

a) Chứng minh tam giác KBC đồng dạng với tam giác DFE và $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CK}$.

b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Chứng minh MN vuông góc với AK và $MA^2 + NK^2 = NA^2 + MK^2$.

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và MN , Chứng minh ba điểm I, J, P thẳng hàng.

d) Đường thẳng IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN tại T (T khác I). Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ .

Câu 5: (1 điểm) Cho tam giác ABC và điểm O thay đổi trong tam giác. Tia Ox song song với AB

cắt BC tại D , tia Oy song song với BC cắt AC tại E , tia Oz song song với AC cắt AB tại

F . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{AB}{OD}\right)^2 + \left(\frac{BC}{OE}\right)^2 + \left(\frac{AC}{OF}\right)^2$

HƯỚNG DẪN

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức sau $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với

$$x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

b) Giải phương trình $5x - (x+4)\sqrt{2x+1} + 4 = 0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy + 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{x + y + 1} = 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{1 + \sqrt{x} + x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \right] \\ &= (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \\ &= (\sqrt{x} - 1) \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x+1} (t \geq 0)$. Ta có phương trình $-t^3 + 5t^2 - 7t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(-t^2 + 4t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

* Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa).

* Với $t=3 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=3 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa).

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy + 4x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{x + y + 1} = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - y + 3 \geq 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1): y^2 + (3x+3)y + 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Delta_y = (x+1)^2 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = -x \end{cases}$$

* TH1: $y = -x - 1$ thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x^2 + x + 4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

* TH2: $y = -2x - 2$ thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{-x - 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 4} + \sqrt{-(x+1)} = 2$$

Ta có $\sqrt{(x+1)^2 + 4} + \sqrt{-(x+1)} \geq 2$, với mọi giá trị của $x \leq -1$ Dấu bằng xảy ra khi $x = -1 \Rightarrow y = 0$ (nhận) Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(0; -1), (-1; 0)$.

Câu 2 (2, 0 điểm).

a) Cho hai đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = 3x^2 + 2ax + b (a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$

a) Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của $P(x)$, ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Đồng nhất hệ số của $P(x)$ ta có:

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= a^2 - 3b = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2] > 0 \end{aligned}$$

Vậy $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt

Lưu ý: hs sử dụng Viet vẫn cho điểm tối đa

b/

Ta có: $(xy-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (xy)^2 - 2xy + 1 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - (xy)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x+y-xy)(x+y+xy) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-xy = 1 \\ x+y+xy = 1 \end{cases}^{(1)} \quad \begin{cases} x+y-xy = -1 \\ x+y+xy = -1 \end{cases}^{(2)}$$

Giải hệ (1) ta được cặp nghiệm $(0;1), (1;0)$

Giải hệ (2) ta được cặp nghiệm $(0;-1), (-1;0)$

Câu 3:

$$(1+bc)^2 = 1 + 2bc + b^2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2b^2c^2$$

$$= a^2 + (b+c)^2 + b^2c^2 \geq a^2 + (b+c)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Ta có : $\Rightarrow 1+bc \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{1+bc} \leq \sqrt{2} \frac{c}{a+b+c} \dots \text{tuongtu}$

$$\Rightarrow S \leq \sqrt{2} \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \sqrt{2}$$

Khi $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=0$ thì $S = \sqrt{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $\sqrt{2}$.

Theo BĐT AM-GM:

$$a(1+bc) \leq \frac{a^2+1}{2} \left(1 + \frac{b^2+c^2}{2} \right) = \frac{(a^2+1)(2+b^2+c^2)}{4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2+1+2+b^2+c^2}{2} \right)^2$$

Từ đó :

$$\frac{a}{1+bc} \geq a^2. \text{ Tuong tu } \frac{b}{1+ac} \geq b^2; \frac{c}{1+ab} \geq c^2 \Rightarrow S \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ Khi } a=1; b=c=0 \text{ thì } S=1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 1.

Câu 4:(3 điểm)

Chưa vẽ hình

Tứ giác BCFE nội tiếp nên ta có: $\widehat{DEF} = \widehat{DBC}; \widehat{DFE} = \widehat{DCB}$

Mặt khác: BDCK là hình bình hành nên $\widehat{BCK} = \widehat{DBC}; \widehat{CBK} = \widehat{DCB}$

Do đó : $\widehat{DEF} = \widehat{BCK}; \widehat{DFE} = \widehat{CBK} \Rightarrow \Delta KBC \sim \Delta DFE (gg)$
 $\Delta KBC \sim \Delta DFE \Rightarrow \frac{DE}{CK} = \frac{EF}{BC} (1); \Delta AEF \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CK}$

Gọi Q là giao điểm của MN và AK. Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ABK}$ (đồng vị) và

$$\widehat{ABK} = \widehat{ABD} + \widehat{DBK} = \widehat{ACE} + \widehat{DCK} = \widehat{ACK}$$

(Do $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}; \widehat{DBK} = \widehat{DCK}$)

Xét ΔAED và ΔACK có: $\widehat{AED} = \widehat{ACK}, \frac{DE}{CK} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ACK (c-g-c)$

$$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{DAE} \text{ hay } \widehat{QAC} = \widehat{DAM}$$

b) Có $\widehat{AMD} + \widehat{AND} = 180^\circ \Rightarrow AMDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{DAM} = \widehat{QAN}$.

$$\text{Mà } \widehat{DNM} + \widehat{MNA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QAN} + \widehat{MNA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQN} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp MN$$

Do đó:

$$\begin{aligned} MA^2 + NK^2 &= QM^2 + QA^2 + QN^2 + QK^2 \\ &= QN^2 + QA^2 + QM^2 + QK^2 = NA^2 + MK^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } MI = \frac{1}{2}AD = NI \Rightarrow I \text{ thuộc đường trung trực của } MN(3)$$

$$\text{c) Ta có } IP \text{ là đường trung bình của tam giác } ADK \Rightarrow IP // AK \Rightarrow IP \perp MN(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra IP là đường trung trực của $MN \Rightarrow I, J, P$ thẳng hàng. Từ (3) và Ta có $\triangle IMN$ cân tại $I, IJ \perp MN$ nên IT là đường kính của đường tròn ngoại

$$\text{tiếp } \triangle IMN \Rightarrow \widehat{INT} = 90^\circ \Rightarrow IJ \cdot IT = IN^2$$

$$\text{Mà } IN = ID \Rightarrow IJ \cdot IT = ID^2 \Rightarrow \triangle IDJ \cup \triangle ITD(g - g) \Rightarrow \widehat{IDJ} = \widehat{ITD}$$

$\Rightarrow ID$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle DTJ$.

Câu 5(1,0 điểm). Cho tam giác ABC và điểm O thay đổi trong tam giác. Tia Ox song song với AB cắt BC tại D , tia Oy song song với BC cắt AC tại E , tia Oz song song với AC cắt AB tại F . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{AB}{OD}\right)^2 + \left(\frac{BC}{OE}\right)^2 + \left(\frac{AC}{OF}\right)^2$

$$\text{Kẻ } DM // OF (M \in AB), EN // OD (N \in BC), FP // OE (P \in AC)$$

$$\text{Ta có: } \frac{OD}{AB} = \frac{EN}{AB} = \frac{NC}{BC} (1); \frac{OE}{BC} = \frac{DN}{BC} (2); \frac{OF}{AC} = \frac{MD}{AC} = \frac{BD}{BC} (3)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3)} \Rightarrow \frac{OD}{AB} + \frac{OE}{BC} + \frac{OF}{AC} = \frac{NC}{BC} + \frac{DN}{BC} + \frac{BD}{BC} = 1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$1 = \frac{OD}{AB} + \frac{OE}{BC} + \frac{OF}{AC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{OD}{AB} \cdot \frac{OE}{BC} \cdot \frac{OF}{AC}} \Leftrightarrow \frac{AB}{OD} \cdot \frac{BC}{OE} \cdot \frac{AC}{OF} \geq 27$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{AB}{OD}\right)^2 + \left(\frac{BC}{OE}\right)^2 + \left(\frac{AC}{OF}\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{AB}{OD} \cdot \frac{BC}{OE} \cdot \frac{AC}{OF}\right)^2} = 27$$

Đẳng thức xảy ra khi O là trọng tâm $\triangle ABC$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 27.