

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$, với $y > x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Biết $(x - 1)(y - 1) + 2\sqrt{xy} = 1$. Tính giá trị của biểu thức P .

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 3 - 4m \\ mx + y = 3m + 2 \end{cases}$ (m là tham số). Chứng minh

rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m và $x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + x - 2x\sqrt{2x + 3} + 14 = 4\sqrt{7 - x}$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + (m + 1)^2 - 3 = 0$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2 + 2 = 0$.

Câu 4. (2,0 điểm) Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A chọn một nhóm gồm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy vi tính nên Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A phải giảm số học sinh dự thi của mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn chiếm 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh dự thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

Câu 5. (2,0 điểm) Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

Câu 6. (4,0 điểm) Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Qua điểm C kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O') . Các đường thẳng DA, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M và N khác A). Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I . Chứng minh:

- a) Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn.
- b) $AE.MB = AB.MI$.
- c) Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN .

Câu 7. (2,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2b^2(a^2 + b^2)$.

-----HẾT-----

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP THÀNH PHỐ
THÀNH PHỐ CẦN THƠ

NĂM HỌC: 2023 - 2024

Khoá ngày: 12 tháng 4 năm 2024

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

MÔN: TOÁN

(Fanpage: Khu vườn trên mây A1B)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3.0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^3 - y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$ với $y > x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Biết $(x - 1)(y - 1) + 2\sqrt{xy} = 1$. Tính giá trị của biểu thức P

HUỲNH NGUYỄN ANH PHƯƠNG

LỜI GIẢI.

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} - x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$\text{b) } (x - 1)(y - 1) + 2\sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow xy - (x - 2\sqrt{xy} + y) = 0 \Leftrightarrow xy = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\text{Vì } y > x > 0 \text{ nên } xy > 0. \text{ Suy ra } \sqrt{xy} = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = -1$$

Câu 2. (3.0 điểm)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x - my = 3 - 4m & (1) \\ mx + y = 3m + 2 & (2) \end{cases}$$
 (m là tham số). Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m và $x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$

TRẦN NGUYỄN QUANG NHÂN

LỜI GIẢI.

- Xét $m = 0$, ta có $x = 3, y = 2$ thoả mãn yêu cầu bài toán

- Xét $m \neq 0$: Do $\frac{1}{m} \neq -m$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất

Khi đó: $x \neq 3, y \neq 4, y \neq 2$ và $(1) \Rightarrow m = \frac{x-3}{y-4}; (2) \Rightarrow m = \frac{2-y}{x-3}$

Suy ra $\frac{x-3}{y-4} = \frac{2-y}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -y^2 + 6y - 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6(x+y) + 17 = 0$ (đpcm)

Câu 3. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + x - 2x\sqrt{2x+3} + 14 = 4\sqrt{7-x}$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + (m+1)^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 0$

ĐOÀN DƯƠNG QUỲNH NHƯ - LÊ HẠNH NGUYỄN

LỜI GIẢI.

a) Với điều kiện $-\frac{3}{2} \leq x \leq 7$, hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2 - 2x\sqrt{2x+3} + 2x + 3 + 7 - x - 4\sqrt{7-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+3})^2 + (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{2x+3})^2 = 0 \\ (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ (t/m)}$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b)

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + (1 - 2m - m^2)x + m^2 + 2m - 2 = 0$ với các hệ số $a = 1, b = 1 - 2m - m^2, c = m^2 + 2m - 2$

Ta có nhận xét $1 + 1 - 2m - m^2 + m^2 + 2m - 2 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1, x = m^2 + 2m - 2$.

Theo giả thiết, $x_1^2 + x_2 + 2 = 0$ (*), ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $x_1 = m^2 + 2m - 2, x_2 = 1$

$$(*) \Leftrightarrow (m^2 + 2m - 2)^2 + 3 = 0 \text{ (vô lí vì } (m^2 + 2m - 2)^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R})$$

- **Trường hợp 2:** $x_1 = 1, x_2 = m^2 + 2m - 2$

$$(*) \Leftrightarrow 1 + m^2 + 2m - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 4. (2.0 điểm)

Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A chọn một nhóm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy vi tính nên Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A phải giảm số học sinh dự thi của mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn chiếm 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh dự thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

NGUYỄN HỮU KHÁNH

LỜI GIẢI.

Gọi x, y (học sinh) lần lượt là số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh của huyện A ($x \geq 0, y \geq 0$)

Vì ban đầu Phòng giáo dục và Đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi nên ta có phương trình:

$$x = 60\%(x + y) \Leftrightarrow 0,4x - 0,6y = 0 \quad (1)$$

Vì sau khi giảm số học sinh của mỗi cấp đi 30, số học sinh tiểu học chiếm 62% nên ta có phương trình:

$$x - 30 = 62\%(x + y - 60) \Leftrightarrow 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 0,4x - 0,6y = 0 \\ 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:
$$\begin{cases} x = 216 \\ y = 144 \end{cases} \quad (\text{t/m})$$

Vậy: số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở tham gia Kỳ thi Violympic cấp tỉnh của huyện A là 216 và 144

Câu 5. (2.0 điểm)

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên

NGUYỄN THẾ KHANG

LỜI GIẢI.

Gọi mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in N^*$ và $a, b, c, d \leq 9$ và $a \geq 2$)

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} = x^2$ và $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2$

Do đó:
$$x^2 - y^2 = 1111 \quad (x, y \in N^*; 32 \leq x, y \leq 99)$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 1.1111 = 11.101$$

Vì $32 \leq x, y \leq 99$ nên $x+y \neq 1111$ và $x+y \neq 1$

Vậy nên không thể xảy ra trường hợp:
$$\begin{cases} x+y=1111 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1111 \end{cases}$$

Mặt khác: $x+y > x-y$ (do x, y là các số nguyên dương) nên chỉ xảy ra trường hợp:

$$\begin{cases} x-y=11 \\ x+y=101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=56 \\ y=45 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy: mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $56^2 = 3136$

Câu 6. (4.0 điểm)

Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Qua điểm C kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O') . Các đường thẳng AD, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M và N khác A). Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I . Chứng minh:

- Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn
- $AE.MB = AB.MI$
- Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN

ĐẶNG HOÀNG PHÚC NGUYỄN

LỜI GIẢI.

- Chứng minh các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

Ta có $\widehat{BNI} = \widehat{DAB}$ (góc ngoài tứ giác nội tiếp)

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{DEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

Do đó B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

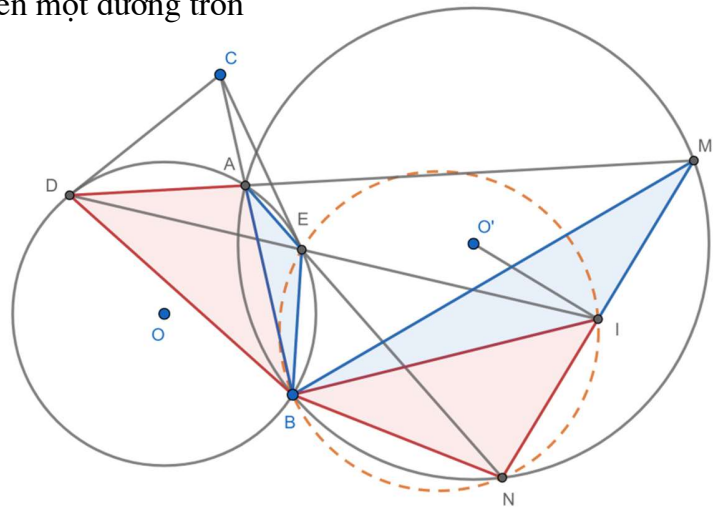
- Chứng minh $AE.MB = AB.MI$

Xét $\triangle MIB$ và $\triangle AEB$ có

$\widehat{BAE} = \widehat{BMI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BN}$)

Mặt khác $\widehat{BEN} = \widehat{BIN}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BN}$) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{BIN}$

$\Rightarrow \triangle MIB \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{MB}{AB} \Leftrightarrow AE.MB = AB.MI$ (đpcm)



c) Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN

$$\text{Ta có } \triangle MIB \sim \triangle AEB \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{IB}{EB} \Leftrightarrow IM = \frac{AE}{EB} \cdot BI \quad (1)$$

Mặt khác, xét $\triangle DAB$ và $\triangle INB$ có

$$\widehat{BNI} = \widehat{BAD} \text{ (góc ngoài tứ giác nội tiếp)}$$

$$\widehat{BDA} = \widehat{BEN} = \widehat{BIN} \Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle INB \Rightarrow \frac{IN}{AD} = \frac{IB}{DB} \Leftrightarrow IN = \frac{AD}{DB} \cdot IB \quad (2)$$

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle ECB$ có

$$\widehat{AEC} = \widehat{CBE} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)}$$

$$\widehat{BCE} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ECB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{AE}{EB} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } \Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{DB} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} \text{ (CE = CD tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (1), (2), (5)} \Rightarrow IM = IN \Rightarrow O'I \perp MN \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét: Tứ giác $AEBD$ được gọi là tứ giác điều hòa và tỉ lệ $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$ chính là một tính chất của tứ giác điều hòa mà các em sẽ được học ở chương trình chuyên

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2b^2(a^2 + b^2)$

LỜI GIẢI.

Cách 1 - Nguyễn Thế Khang:

$$\text{Ta có } 2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$$

$$\text{Lại có } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$$

$$\text{Mà } P = a^2b^2(a^2 + b^2) = \frac{a^2b^2(4 - 2ab)}{1} \leq \frac{a^2b^2(4 - 2ab)}{ab} = 4ab - 2a^2b^2$$

$$\text{Đặt } ab = t \text{ (với } 0 < t \leq 1) \Rightarrow 2 - t > 0$$

$$\text{Khi đó } P = 4t - 2t^2 = 2.t(2 - t) \leq 2 \cdot \frac{(t + 2 - t)^2}{4} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$

$$\text{Vậy Max } P = 2, \text{ đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} ab = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$$

Cách 2 - Lê Hoàng Thiên Khôi:

$$\text{Ta có } ab \leq \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{Do đó } P \leq ab(a^2 + b^2) \text{ hay } 2P \leq 2ab(a^2 + b^2) \leq \frac{(a^2 + 2ab + b^2)^2}{4} = \frac{(a + b)^4}{4} = 4$$

$$\text{Vậy } 2P \leq 4 \Leftrightarrow P \leq 2, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = 1$$

-----**HẾT**-----

Nhóm học sinh thực hiện: Huỳnh Nguyễn Anh Phương, Đoàn Dương Quỳnh Như, Lê Hạnh Nguyên, Đặng Hoàng Phúc Nguyên, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Thế Khang, Trần Nguyễn Quang Nhân, Lê Hoàng Thiên Khôi, Nguyễn Hữu Khánh

(Chuyên Toán K34 - THPT Chuyên Lý Tự Trọng)