

Lời giải đề Toán chuyên trường THPT chuyên Chu Văn An - Lạng Sơn kỳ thi vào 10 năm học 2025 - 2026

Lê Phúc Thanh Sơn - A1k34, Hoàng Anh Quân - A1k34, Đỗ Hoàng
Mạnh Dũng - A1k35, Lương Ngọc Khánh Huy - A1k35, Đỗ Đức Hanh - A2k35

June 06, 2025



1 Đề bài¹

Bài 2 (1,0 điểm).

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

a Rút gọn biểu thức P .

b Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{4}$.

Bài 3 (2,0 điểm).

a Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3a - b + c = 0$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm đều không thể cùng là số dương.

b Kết thúc năm học 2024 – 2025, An hỏi Bình: “Năm học vừa qua, bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9?”. Bình trả lời: “Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183”. Em hãy tính giúp An xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9.

¹Vẫn như mọi năm câu 1 là trắc nghiệm 4 lựa chọn gồm nhiều ý nên nhóm bỏ qua phần đề bài và đáp án của câu này và bắt đầu từ câu 2.

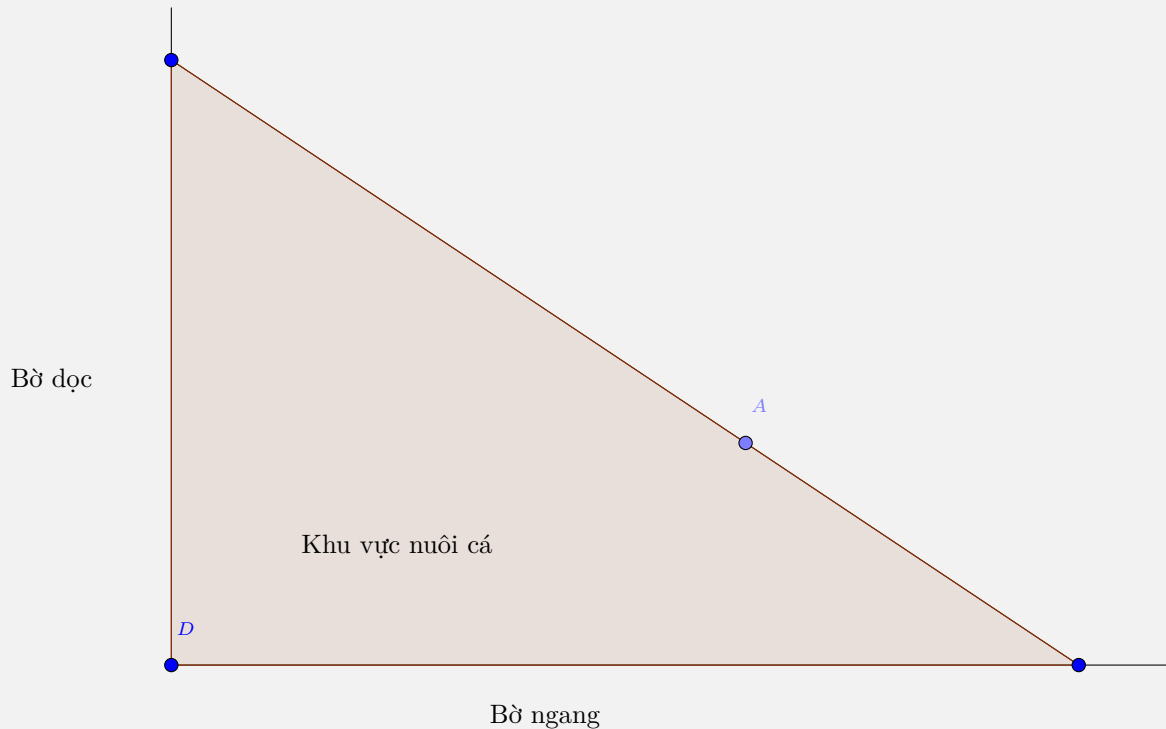
Bài 4 (2,0 điểm).

a Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 4 = 0$.

b Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

c Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc ao là góc vuông. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một Vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua cái cọc đã được cắm sẵn ở điểm A (tham khảo hình bên). Biết khoảng cách từ A đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ A đến bờ dọc là $12m$, diện tích nhỏ nhất của khu vực cá có thể giăng là bao nhiêu mét vuông?



(Hình ảnh minh họa)

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi P là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC , I là giao điểm của đoạn thẳng PA với đường tròn (O) ($I \neq A$).

a Chứng minh các điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.

c Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AB, CF lần lượt tại Q, S . Chứng minh D là trung điểm của QS .

Câu 6 (1,0 điểm).

- a Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 9$ không chia hết cho 25.
- b Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2025. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tồn tại hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3, 6, 9\}$.

2 Lời giải**Bài 2 (1,0 điểm).**

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

- a Rút gọn biểu thức P .
- b Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{4}$.

** Lời giải.**

a Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} && \text{với } x \geq 0 \\
 &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{x-\sqrt{x}+1}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} && \text{với } x \geq 0 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+2} && \text{với } x \geq 0
 \end{aligned}$$

b Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &\geq \frac{1}{4} && \text{với } x \geq 0 \\
 \frac{1}{\sqrt{x}+2} &\geq \frac{1}{4} && \text{với } x \geq 0 \\
 4 &\geq \sqrt{x}+2 && \text{với } x \geq 0 \\
 2 &\geq \sqrt{x} && \text{với } x \geq 0 \\
 4 &\geq x && \text{với } x \geq 0
 \end{aligned}$$

Vậy với $4 \geq x \geq 0$ thỏa mãn $P \geq \frac{1}{4}$.

Bài 3 (2,0 điểm).

- a Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3a - b + c = 0$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm đều không thể cùng là số dương.
- b Kết thúc năm học 2024 – 2025, An hỏi Bình: “Năm học vừa qua, bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9?”. Bình trả lời: “Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183”. Em hãy tính giúp An xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9.

 Lời giải.

- a Xét $\Delta = b^2 - 4ac$ mà $b = 3a + c$ nên:

$$\begin{aligned}\Delta &= (3a + c)^2 - 4ac \\ &= 9a^2 + 2ac + c^2 \\ &= 8a^2 + (a + c)^2 > 0, \text{ vì } a \neq 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm đó. Theo Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Giả sử phản chứng, $x_1, x_2 > 0$. Mà theo Vi-et $\Rightarrow c, a, -b$ cùng dấu nên $3a - b + c \neq 0 \Rightarrow$ Vô lý.

- b Gọi số bài kiểm tra đạt điểm 8 và 9 của Bình lần lượt là a và b ($a, b \in \mathbb{N}$). Theo dữ kiện đề bài, ta có:

$$\begin{cases} a + b > 21 \\ 8a + 9b = 183 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 8b > 168 \\ 8a + 9b = 183 \end{cases}$$

Vì $8a + 8b > 168$ nên $183 = 8a + 9b > 168 + b \Rightarrow 15 > b$. Mặt khác:

$$\begin{aligned}183 &\equiv 7 \pmod{8} \\ 8a + 9b &\equiv b \pmod{8} \\ \Rightarrow b &\equiv 7 \pmod{8}\end{aligned}$$

$\Rightarrow b = 7$ thay vào phương trình trên ta thu được $(a, b) = (15, 7)$. Vậy Bình có 15 bài 8 điểm và 7 bài 9 điểm.

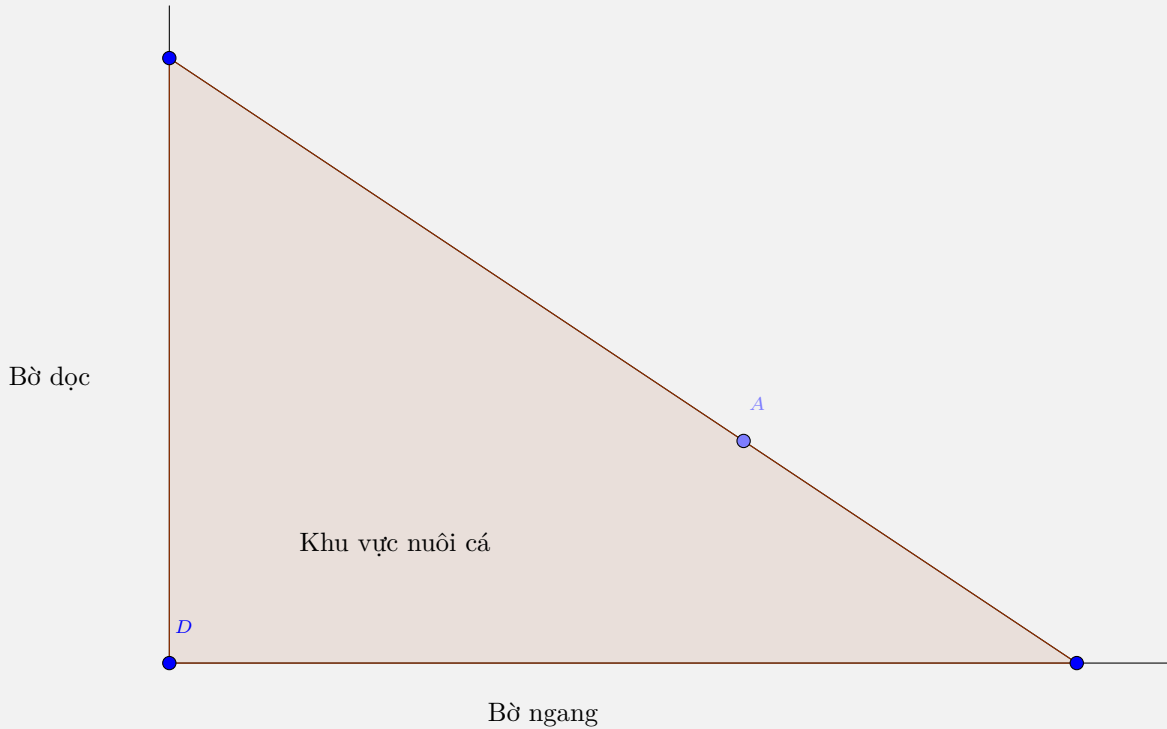
Bài 4 (2,0 điểm).

a Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 4 = 0$.

b Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

c Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc ao là góc vuông. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một Vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua cái cọc đã được cắm sẵn ở điểm A (tham khảo hình bên). Biết khoảng cách từ A đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ A đến bờ dọc là $12m$, diện tích nhỏ nhất của khu vực cá có thể giăng là bao nhiêu mét vuông?



(Hình ảnh minh họa)

✎ Lời giải.

a Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 4 = 0 &\iff x^2(x^2 - 2x + 4) - 2x(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2x + 4) = 0 \\ &\iff (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 4) = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 4 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{– Xét phương trình (1) } x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 2 \iff \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{– Xét phương trình (2) } x^2 - 2x + 4 = 0 \iff (x - 1)^2 = -3 \text{ (Vô lí)}$$

Suy ra phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

b Gọi:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có:

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2 = 0 &\iff (2x - y + 2)(x + y - 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1 : } 2x - y + 2 = 0 \iff y = 2x + 2$$

Thay vào (2) ta được:

$$x^2 - (2x + 2)^2 = 3 \iff -3x^2 - 8x - 7 = 0$$

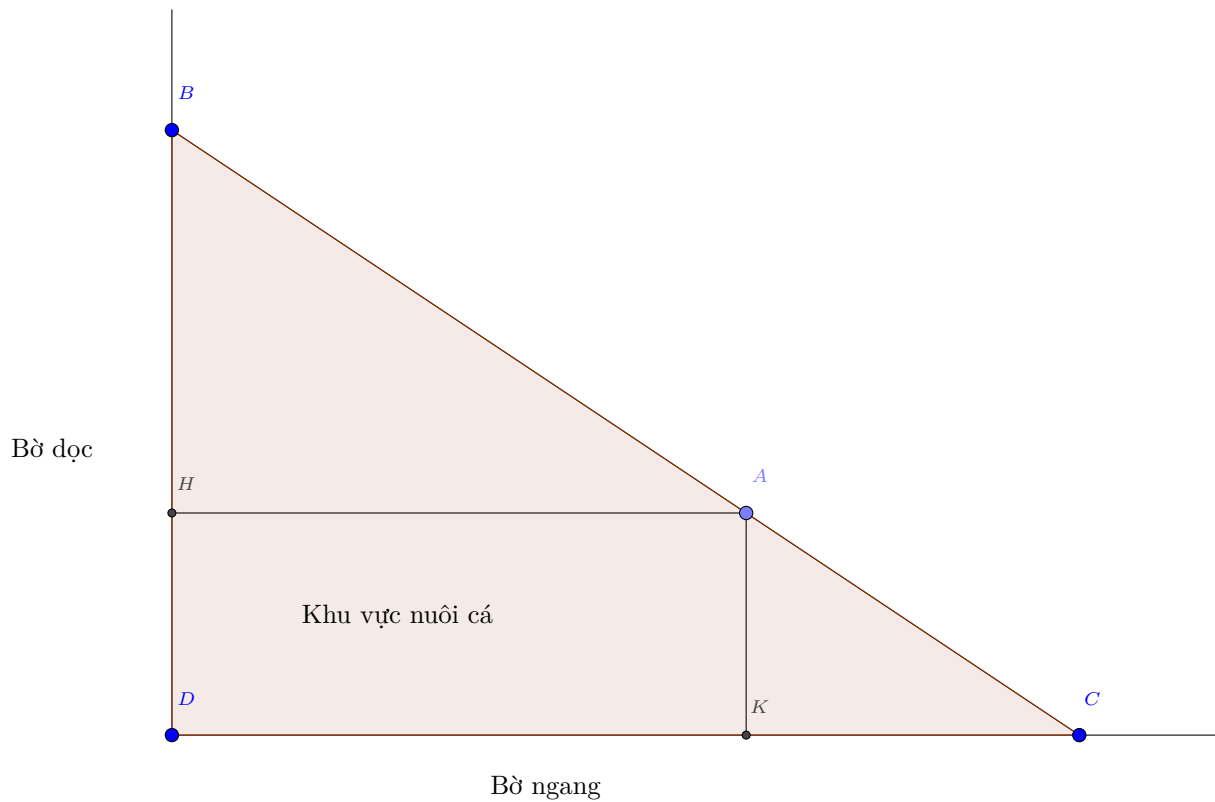
Dễ thấy phương trình vô nghiệm

$$\text{TH2 : } x + y - 1 = 0 \iff y = 1 - x$$

Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^2 - (1 - x)^2 = 3 &\iff 2x = 4 \\ &\iff x = 2 \iff y = -1 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, -1)$.



(Hình ảnh minh họa)

c

Ta mô hình hóa bài toán với các điểm B, C như hình vẽ. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lần lượt trên bờ dọc và bờ ngang, khi đó $AH = 12m$, $AK = 5m$.

Đặt $BH = x$ ($x > 0$, m)

Áp dụng định lí Thales, ta có: $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{CA} = \frac{DK}{KC} \iff KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{5 \cdot 12}{x} = \frac{60}{x}$ (m).

Diện tích khu nuôi cá:

$$S = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 = 120$$

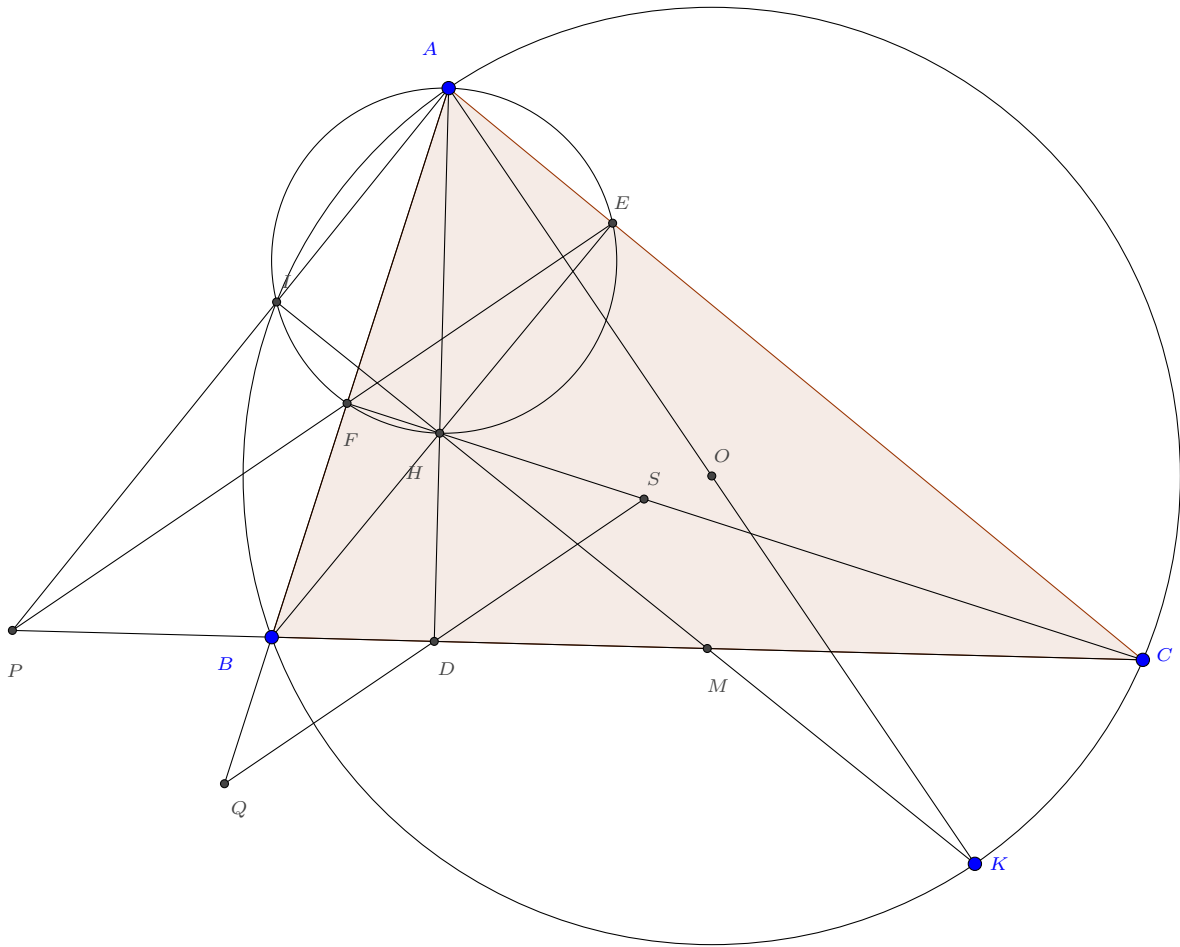
Dấu bằng xảy ra $\iff 6x = \frac{150}{x} \iff x = 5$ (do $x > 0$).

Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là $120m^2$.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi P là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC , I là giao điểm của đoạn thẳng PA với đường tròn (O) ($I \neq A$).

- Chứng minh các điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.
- Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AB, CF lần lượt tại Q, S . Chứng minh D là trung điểm của QS .

✎ Lời giải.

- Vì $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (BC) .

Ta có: $\mathcal{P}_{P/(BC)} = PB \cdot PC = PF \cdot PE$ và $\mathcal{P}_{P/(O)} = PB \cdot PC = PI \cdot PA$.

$$\Rightarrow PI \cdot PA = PE \cdot PF$$

Do đó tứ giác $AIEF$ nội tiếp. Mặt khác $\angle AFH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (AH) . Suy ra 5 điểm A, E, H, F, I cùng nằm trên đường tròn (AH) .

b Kẻ đường kính AK của (O) . Vì $CK \perp AC$, $BH \perp AC$ nên $BH \parallel CK$. Tương tự: $CH \parallel BK$, do đó $BHCK$ là hình bình hành. Mặt khác M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của HK , hay ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Lại có $\angle AIK = \angle AIH = 90^\circ$ nên I, H, K thẳng hàng hay bốn điểm I, H, M, K thẳng hàng.

c Áp dụng định lý Thales, ta có:

$$\frac{DQ}{PF} = \frac{BD}{BP} \text{ và } \frac{PF}{DS} = \frac{CP}{CD}$$

Nhân vế với vế 2 đẳng thức trên ta được:

$$\frac{DQ}{DS} = \frac{BD}{BP} \cdot \frac{CP}{CD} (*)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$, cát tuyến EFP ta được:

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 (1)$$

Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle ABC$ có AD, BE, CF đồng quy tại H , ta được:

$$\frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 (2)$$

Nhân vế với vế của hai đẳng thức (1) và (2) được:

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1 (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\frac{DQ}{DS} = 1 \text{ hay } DQ = DS.$$

Vậy D là trung điểm của QS .

Câu 6 (1,0 điểm).

- a Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 9$ không chia hết cho 25.
- b Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2025. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tồn tại hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3, 6, 9\}$.

Lời giải.

a Giả sử phản chứng tồn tại số nguyên n để $25 \mid n^2 + n + 9$. Ta có:

$$n^2 + n \equiv 16 \pmod{25}$$

Nên tồn tại số nguyên k để $n^2 + n$ có dạng $16 + 25k$. Xét $P(x) = x^2 + x - 16 - 25k$. khi đó $P(n) = 0$. Xét:

$$\begin{aligned} \Delta_{P(x)} &= 1 + 4 \cdot (16 + 25k) \\ &= 100k + 65 \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nên Δ là số chính phương hay tồn tại y để $y^2 = 100k + 65$. Dễ thấy $5 \mid y$ nên $25 \mid y^2$ mà $25 \nmid 100k$ suy ra $25 \nmid 65$ (Vô lý). Vậy không tồn tại n thỏa mãn.

b Ta chia 2025 số nguyên dương đầu tiên thành các tập như sau:

$$\{9k + 1, 9k + 4, 9k + 7\}$$

$$\{9k + 2, 9k + 5, 9k + 8\}$$

$$\{9k + 3, 9k + 6, 9k + 9\}$$

Với $k = 1, 2, \dots, 225$. Khi đó ta có $225 \cdot 3 = 675$ tập như vậy. Mặt khác, từ định nghĩa tập X , ta nhận thấy phần tử tập X thuộc một trong các tập trên, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 tập có ít nhất:

$$\left\lfloor \frac{700}{625} \right\rfloor + 1 = 2 \text{ Phần tử của } X$$

Như vậy, không mất tính tổng quát, giả sử 2 phần tử đó thuộc tập $\{9k + 1, 9k + 4, 9k + 7\}$. Dễ thấy với mọi cách chọn 2 số trong tập này thì hiệu của chúng luôn thuộc tập E . Vậy bài toán được chứng minh.