

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2024 - 2025



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên

Môn thi: Toán (vòng 2)

Nguyễn Nhất Huy - Trần Nguyễn Đức Nhật

Lê Thanh Lâm - Hoàng Lê Nhật Tùng

Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1 (3,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 = 4 \\ (3x + 4y - 2)(x^2 + 2y^2 - 3xy) = 4 \end{cases}$$

2. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} = 1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1}$$

Câu 2 (2,5 điểm).

1. Tìm các số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y)^3 + 6xy + 3y^2 + y = 8x^3 + 9x^2 + 1$$

2. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1 x_2 \dots x_{2024} = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = (x_1^2 - x_1 + 1)(x_2^2 - x_2 + 1) \dots (x_{2024}^2 - x_{2024} + 1)$$

Câu 3 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB . Điểm P di chuyển trên cung nhỏ BC (P khác B, C). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PC, PB với EF . AM, AN cắt (O) theo thứ tự tại Q, R (Q, R khác A).

1. Chứng minh rằng tứ giác $AFPM$ nội tiếp và $EPF = QPR$.
2. Chứng minh rằng giao điểm của QE và RF nằm trên (O) .
3. Lấy S, T lần lượt thuộc vào các đường thẳng CA, AB sao cho ba đường thẳng ET, FS, AP song song với nhau. Gọi K và L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác NFS và MET . Đường thẳng qua K vuông góc với AB cắt đường thẳng qua L vuông góc với AC tại J . Chứng minh rằng J luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Câu 4 (1 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho có thể cắt hình vuông có cạnh bằng m thành đúng 5 hình chữ nhật mà độ dài 10 cạnh của 5 hình chữ nhật đó được lấy từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ và mỗi số được lấy đúng một lần.

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (3,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 = 4 \\ (3x + 4y - 2)(x^2 + 2y^2 - 3xy) = 4 \end{cases}$$

2. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} = 1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1}$$

Lời giải.

1. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (x-y)(x-2y)(x+y)(x+2y) = 4 \\ (x-y)(x-2y)(3x+4y-2) = 4 \end{cases}$$

Hệ trên cho ta $(x+y)(x+2y) = 3x+4y-2$ hay

$$(x+y-1)(x+2y-2) = 0$$

Suy ra $x+y=1$ hoặc $x+2y=2$.

- Nếu $x+y=1$, thế $y=1-x$ vào phương trình đầu tiên ta được

$$(2x-1)(3x-2)(2-x) = 4$$

tương đương với

$$x(6x^2 - 19x + 16) = 0$$

Do $6x^2 - 19x + 16 = 6\left(x - \frac{19}{12}\right)^2 + \frac{23}{144} > 0$ nên ta phải có $x=0, y=1$.

- Nếu $x+2y=2$, thế $x=2-2y$ vào phương trình đầu ta được

$$(2-3y)(1-2y)(2-y) = 1$$

tương đương

$$(y-1)(6y^2 - 13y + 3) = 0$$

đến đây tìm được các nghiệm (x, y) của hệ phương trình là

$$(0;1), \left(\frac{-1-\sqrt{97}}{6}; \frac{13+\sqrt{97}}{12}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{97}}{6}; \frac{13-\sqrt{97}}{12}\right)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng ba nghiệm $(x; y)$ là

$$(0;1), \left(\frac{-1-\sqrt{97}}{6}; \frac{13+\sqrt{97}}{12}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{97}}{6}; \frac{13-\sqrt{97}}{12}\right)$$

2. Điều kiện xác định: $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Ta sẽ chứng minh với điều kiện trên của bài toán thì

$$\sqrt{2-x} + 1 \geq \sqrt{x} + \sqrt{3-2x}$$

Thật vậy, bình phương hai vế ta có

$$1 + 2 - x + 2\sqrt{2-x} \geq x + 3 - 2x + 2\sqrt{x(3-2x)}$$

hay cần chứng minh

$$\sqrt{2-x} \geq \sqrt{x(3-2x)}$$

Bình phương hai vế lại có $3x-2x^2 \leq 2-x$ hay $2(x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Do đó ta có

$$1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1} \geq 1 + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{3-2x}$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 2: (2,5 điểm)

1. Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y)^3 + 6xy + 3y^2 + y = 8x^3 + 9x^2 + 1$$

2. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1 x_2 \dots x_{2024} = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = (x_1^2 - x_1 + 1)(x_2^2 - x_2 + 1) \dots (x_{2024}^2 - x_{2024} + 1)$$

Lời giải.

1. CÁCH 1. Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} & (x+y)^3 + 6xy + 3y^2 + y = 8x^3 + 9x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & 8x^3 - (x+y)^3 + 6x^2 - 6xy + 3x^2 - 3y^2 = y-1 \\ \Leftrightarrow & (x-y)(7x^2 + 4xy + y^2 + 9x + 3y) = y-1 \end{aligned}$$

Vì x, y nguyên dương nên $VP \geq 0$, kéo theo $x \geq y$. Nếu $x \neq y$ thì $x-y \geq 1$ suy ra $VP = y-1 > 3y$ hay $2y < -1$ vô lý vì y nguyên dương. Do vậy, $x=y$ kéo theo $y=1$.

Vậy có đúng một cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(1; 1)$.

CÁCH 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 6x + y = (2x+1)^3$$

Suy ra $(x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 6x + y$ là một lập phương đúng. Ta có

$$(x+y)^3 < (x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 6x + y < (x+y+2)^3$$

nên

$$(x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 6x + y = (x+y+1)^3$$

Khai triển và rút gọn, ta được

$$3x = 2y + 1 \quad (1)$$

Hơn nữa vì $(x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 6x + y = (2x+1)^3$ nên $(x+y+1)^3 = (2x+1)^3$ và từ đây ta có ngay $x+y+1=2x+1$ kéo theo

$$x = y. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta tìm được $x=y=1$ và cặp $(x; y) = (1; 1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có $x^2 + 1 \geq 2x$, suy ra

$$x^2 + 1 - x \geq x$$

Áp dụng vào bài toán ta có

$$\begin{aligned}
M &= (x_1^2 - x_1 + 1)(x_2^2 - x_2 + 1) \dots (x_{2024}^2 - x_{2024} + 1) \\
&\geq x_1 x_2 \dots x_{2024} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

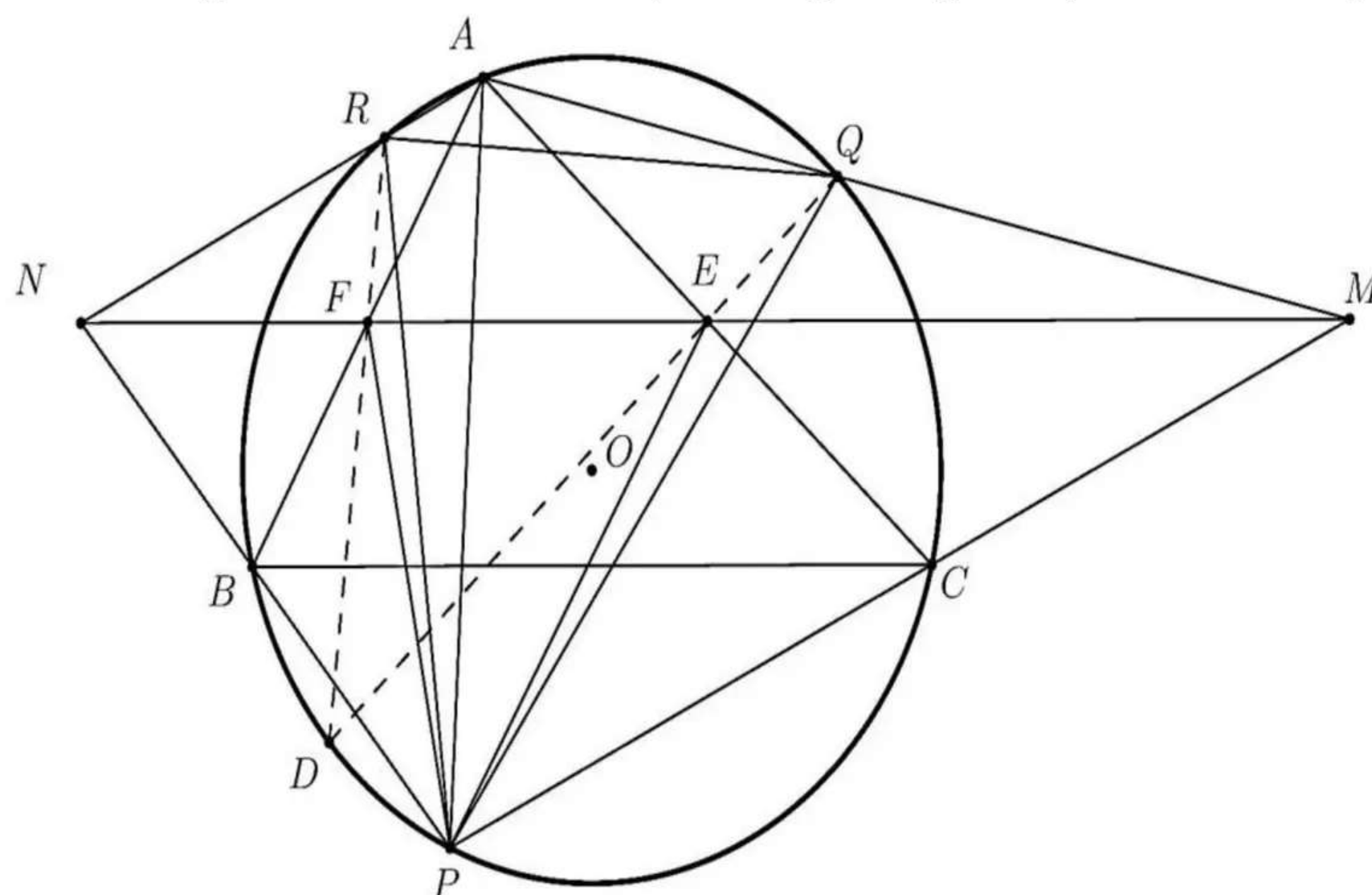
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_{2024} = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Câu 3: (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB . Điểm P di chuyển trên cung nhỏ BC (P khác B, C). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PC, PB với EF . AM, AN cắt (O) theo thứ tự tại Q, R (Q, R khác A).

1. Chứng minh rằng tứ giác $AFPM$ nội tiếp và $EPF = QPR$.
2. Chứng minh rằng giao điểm của QE và RF nằm trên (O) .
3. Lấy S, T lần lượt thuộc vào các đường thẳng CA, AB sao cho ba đường thẳng ET, FS, AP song song với nhau. Gọi K và L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác NFS và MET . Đường thẳng qua K vuông góc với AB cắt đường thẳng qua L vuông góc với AC tại J . Chứng minh rằng J luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.



Lời giải.

1. Vì $EF \parallel BC$ và tứ giác $ABPC$ nội tiếp nên ta thu được $PMF = PCB = PAB = PAF$. Do đó, tứ giác $AFPM$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta cũng được tứ giác $AEPN$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc

$$EPF = EPA + FPA = ENA + FMA = 180^\circ - MAN = 180^\circ - QAR = QPR$$

2. Từ các tứ giác nội tiếp $AEPN$ và $AQPR$ ta thu được $PEF = PEN = PAN = PAR = PQR$. Vì thế ta được $\triangle PEF \sim \triangle PQR$ (g.g), dẫn đến $\frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$. Kết hợp với

$$EPQ = RPQ - RPE = FPE - RPE = FPR, \text{ ta suy ra } \triangle PEQ \sim \triangle PFR \text{ (c.g.c). Do đó, } PRF = PQE.$$

Gọi D là giao điểm của QE và RF . Từ $PRF = PQE$ ta suy ra tứ giác $DPQR$ nội tiếp. Vì vậy $D \in (O)$ và ta có điều phải chứng minh.

3. Trước hết ta phát biểu ba bổ đề như sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho tứ giác $BCEF$ nội tiếp. BE cắt CF tại điểm K . Khi đó, ba đường tròn $(O), (AEF)$ và (AK) có một điểm chung khác A .

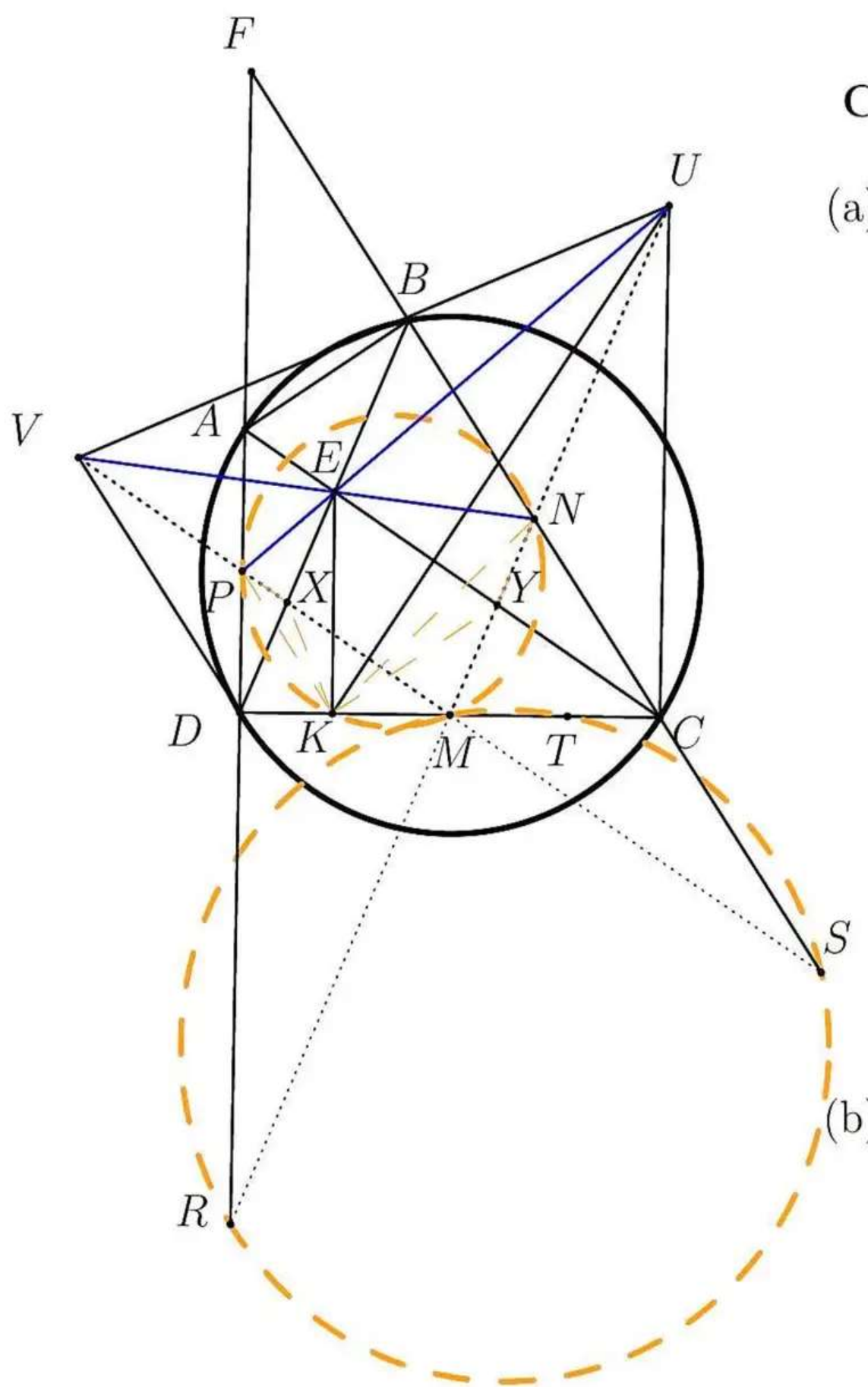
Đây là bổ đề quen thuộc, nên xin phép không nhắc lại chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC cắt BD tại E . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, BC, AD . K là hình chiếu của E trên BC và T là điểm đối xứng với K qua M .

Trên các đường thẳng AD, BC lấy các điểm R, S sao cho $MR \parallel BD$ và $MS \parallel AC$. Khi đó ta có

(a) bốn điểm K, M, N, P cùng thuộc một đường tròn;

(b) bốn điểm M, R, S, T cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh bổ đề 2 .

(a) Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của ED, EC . Từ tính chất đường trung bình thì ta có $X \in MP$ và $Y \in MN$. Để ý rằng E, K đối xứng nhau qua XY và $EXMY$ là hình bình hành, ta được

$\angle XKY = \angle XEY = \angle XMY$, dẫn đến tứ giác $KXYM$ nội tiếp. Do đó $\angle KXM = \angle KYM$ và kéo theo $\angle KXP = \angle KYN$. Mặt khác, để ý rằng $\triangle EAD \sim \triangle EBC$ nên ta có

$$\frac{KX}{XP} = \frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{KY}{YN}$$

Như vậy $\triangle KXP \sim \triangle KYN$ (c.g.c). Vì thế $\angle KPX = \angle KNY$ và do đó $KMNP$ là tứ giác nội tiếp.

(b) Gọi U, V lần lượt là các điểm đối xứng với S, R qua M . Ta chỉ cần chứng minh tứ giác $KMUV$ nội tiếp, rồi dùng tính đối xứng để thu được điều phải chứng minh.

Gọi U, V lần lượt là các điểm đối xứng với S, R qua M . Ta chỉ cần chứng minh tứ giác $KMUV$ nội tiếp, rồi dùng tính đối xứng để thu được điều phải chứng minh.

Đầu tiên để ý rằng $NRP = EDA = ECB = NSP$, vì thế tứ giác $NPRS$ nội tiếp. Kết hợp với $UV \parallel RS$ ta thu được $NUV = NRS = NPS$, dẫn đến tứ giác $NUVP$ là tứ giác nội tiếp.

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh N, E, V thẳng hàng. Đặt $AD \cap BC \equiv F$. Chú ý rằng $DV \parallel BC$ và

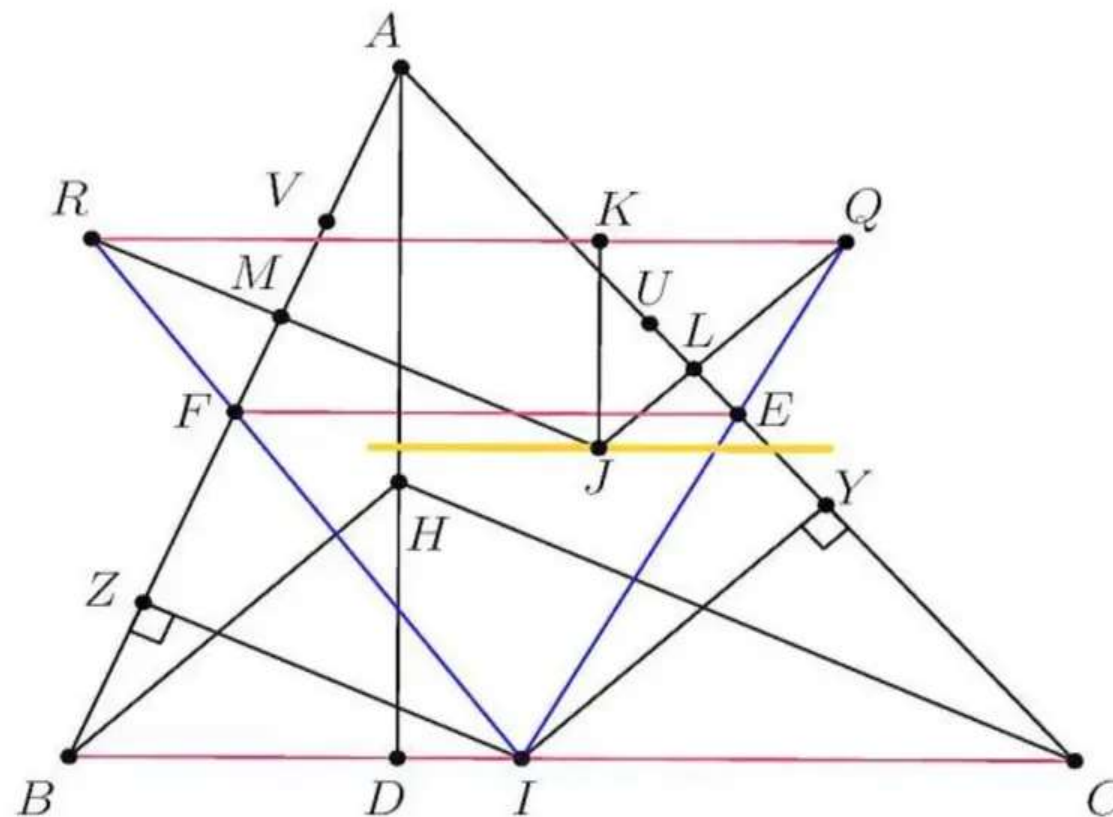
$PV \parallel BC$, ta được $PDV = AFC$ và $DPV = FAC$, kéo theo $\triangle DPV \sim \triangle FAC$ (g.g). Do đó,

$$\frac{DV}{BN} = \frac{DV}{DP} \cdot \frac{DP}{BN} = \frac{FC}{FA} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AB} \cdot \frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EA} \cdot \frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EB}$$

Từ đó suy ra E, N, V thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta cũng được P, E, U thẳng hàng. Áp dụng bổ đề 1 cho $\triangle MUV$, để ý rằng tứ giác $NUVP$ nội tiếp, ta suy ra ba đường tròn $(MUV), (MNP)$ và (ME) đồng quy tại một điểm khác M . Mặt khác, từ ý (a) ta lại có (MNP) và (ME) cắt nhau tại K .

Vì vậy ta thu được $K \in (MUV)$.

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC . E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB . I là một điểm di chuyển trên BC . Y, Z lần lượt là hình chiếu của I trên CA, AB . U, V lần lượt đối xứng với Y, Z qua E, F . Trung trực của EU và FV cắt nhau tại J . Khi đó, điểm J chạy trên một đường thẳng cố định.



Chứng minh bổ đề. Gọi L, M lần lượt là trung điểm của EU và FV . Khi đó, ta có $EL = \frac{1}{2}EY$ và

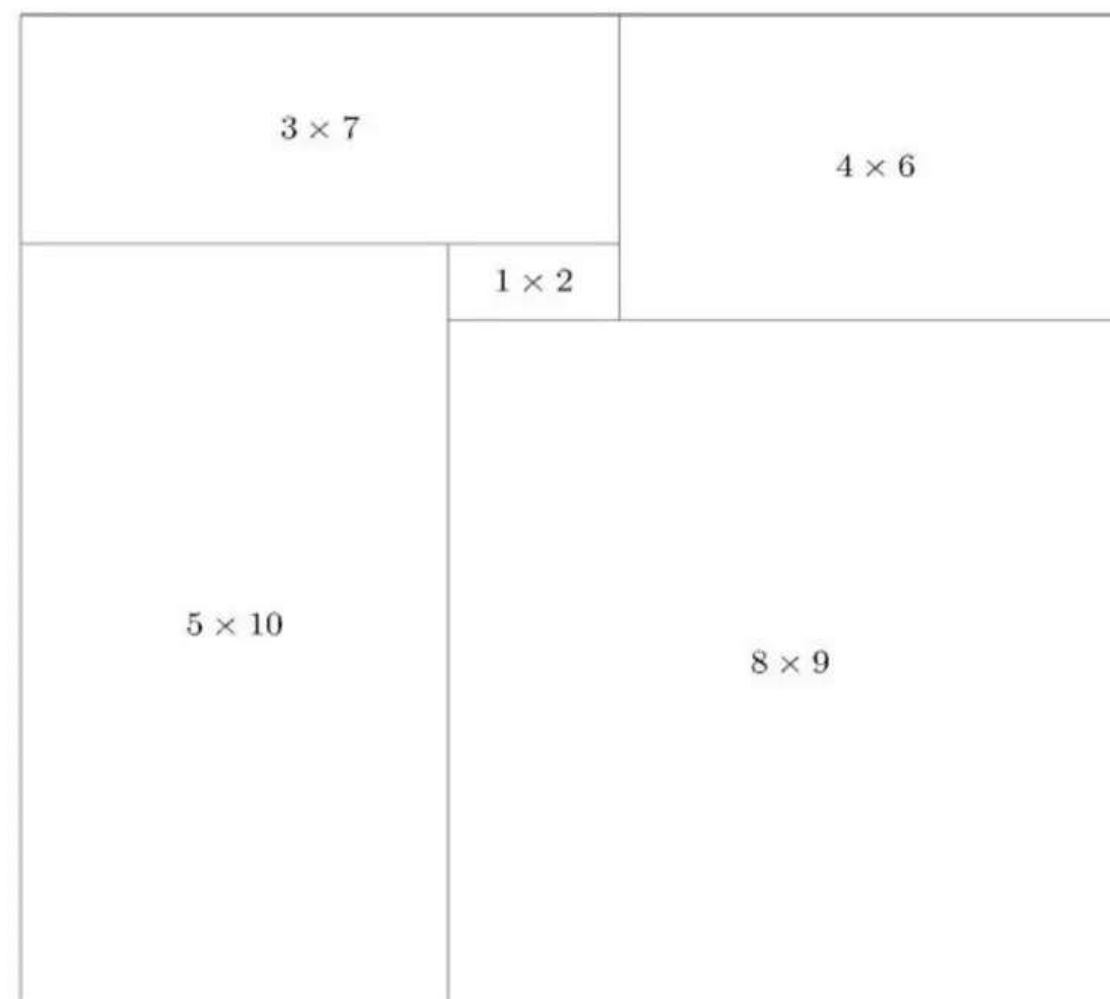
$FM = \frac{1}{2}FZ$. Trên tia đối của tia EI lấy điểm Q sao cho $EQ = \frac{1}{2}EI$. Trên tia đối của tia FI lấy điểm

R sao cho $FR = \frac{1}{2}FI$. Khi đó ta được $MR \parallel IZ$ và $LQ \parallel IY$ và dẫn đến $Q \in JL$ và $R \in JM$.

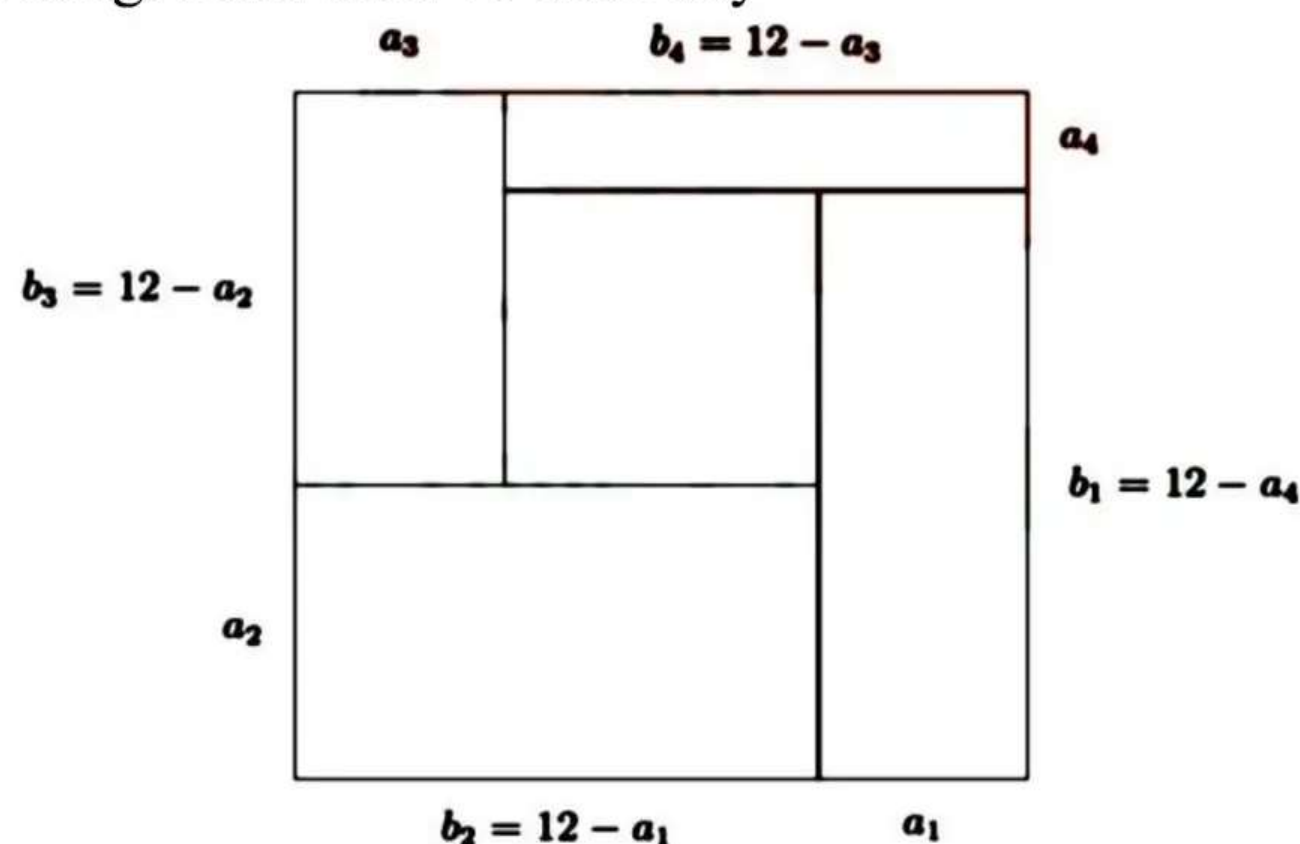
Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. AH cắt BC tại D và gọi K là hình chiếu của J trên QR . Khi đó ta có $JQ \parallel HB$ (cùng vuông góc với CA) và $JR \parallel HC$ (cùng vuông góc với AB). Lại để ý rằng $QR \parallel EF \parallel BC$, ta chứng minh được $\triangle JQR \sim \triangle HBC$ (g.g). Để ý rằng JK và HD là hai đường cao tương ứng của hai tam giác này, vì thế ta thu được

$$\frac{JK}{HD} = \frac{QR}{BC} = \frac{QR}{EF} \cdot \frac{EF}{BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- Khi $m=13$, có thể cắt hình vuông cạnh 11 thành 5 hình chữ nhật gồm $1 \times 2, 3 \times 7, 4 \times 6, 5 \times 10, 8 \times 9$. Xem hình vẽ dưới đây



- Khi $m=12$, ta sẽ chứng minh $m=12$ không thoả mãn. Thật vậy, có 4 hình chữ nhật nằm ở bốn góc của hình vuông. Xem hình vẽ dưới đây



Mỗi cạnh hình vuông được chia thành hai cạnh có tổng bằng 12. Tuy nhiên vì hai đoạn độ dài 1,6 không có cạnh tương ứng để tổng bằng 12. Điều này có nghĩa là hình chữ nhật ở giữa phải là hình 1×6 . Suy ra

$$\begin{cases} 12 - (a_1 + a_3) = 6 \\ 12 - (a_2 + a_4) = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $a_1 + a_3 = 6, a_2 + a_4 = 11$. Suy ra (a_1, a_3) là $(2, 4)$ hoặc $(4, 2)$; còn (a_2, a_4) là $(3, 8)$ hoặc $(8, 3)$. Không mất tổng quát có thể giả sử $(a_1, a_3) = (2, 4)$. Nhưng khi đó $b_4 = 12 - a_3 = 8$, tức là cạnh có độ dài 8 xuất hiện hai lần, trái với yêu cầu bài toán.