

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\sqrt{x + \frac{2xy}{1+y^2}} + \sqrt{x - \frac{2xy}{1+y^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$ với $x \geq 0, y \geq 1$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}}$
- Cho $B = x + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A - B$.

Bài 2. a) Giải phương trình $x - \sqrt{2x-1} = 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

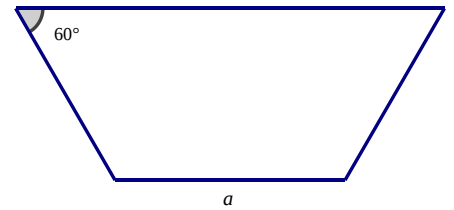
- c) Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 3m = 0$ (m là tham số). Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m. Xác định m để $x_1 - 3x_2 = 8$.

Bài 3. a) Cho các số thực dương x, y. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

- b) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $b + c \geq 16abc$.

- c) Tìm tất cả các số nguyên a để $a^2 - a + 3$ là số chính phương.

Bài 4. Người ta đào một con kênh với thiết diện cắt ngang là một hình thang cân, đáy nhỏ bằng a và góc nhọn của nó là 60° (hình vẽ). Theo tính toán để lưu lượng nước thoát qua con kênh này lớn nhất người ta thiết kế con kênh có diện tích mặt cắt (hình thang cân) là $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Khi $a = 2m$,



hãy tính bề ngang con kênh (đáy lớn của hình thang cân) theo thiết kế.

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $CA = CB$. Gọi M là trung điểm của dây cung AC. Tia BM cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E, D là giao điểm của hai đường thẳng AE và BC.

- Chứng minh rằng tứ giác MOCD là hình bình hành.
- Kẻ EF vuông góc với AC tại F. Tính tỉ số $\frac{MF}{EF}$.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC (M khác B, C), N là điểm trên cạnh CD sao cho $MAN = 45^\circ$, đường thẳng BD cắt AM, AN lần lượt tại K và H, gọi O là giao điểm của MH và KN.

- Chứng minh rằng tứ giác ABMH nội tiếp.
- Chứng minh rằng $OH \cdot OM = OK \cdot ON$.
- Đặt $BM = x, DN = y$. Tính diện tích S của tam giác AMN theo x, y và tìm giá trị nhỏ nhất của S.

----- HẾT -----

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\sqrt{x + \frac{2xy}{1+y^2}} + \sqrt{x - \frac{2xy}{1+y^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \\ A &= \frac{\sqrt{x(y^2+2y+1)} + \sqrt{x(y^2-2y+1)}}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^2}} \\ A &= \frac{\sqrt{x}(y+1+y-1)}{y} = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } x = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}} = \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})^2} = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 2\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = 2\sqrt{5} + 2$$

$$\text{c) Ta có: } A - B = -x + 2\sqrt{x} - 2 = -(\sqrt{x} - 1)^2 - 1 \geq -1 \forall x \geq 0$$

Vậy GTNN của $A - B$ là -1 khi $x = 1$

Bài 2.

$$\text{a) } x - \sqrt{2x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1(L) \\ x = 5(TM) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{5\}$

b) Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \\ x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(4; 9), (9; 4)\}$

$$\text{c) } x^2 - 4x - m^2 - 3m = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 4 + m^2 + 3m = \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm với mọi m .

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi - et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4(1) \\ x_1 x_2 = -m^2 - 3m(2) \end{cases}$$

$$\text{Mà } x_1 - 3x_2 = 8(3)$$

Từ (1) và (3) ta có $x_1 = 5; x_2 = -1$ thay vào (2) ta được

$$-m^2 - 3m = -5$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Vậy với $m = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 3.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

b) Ta có: $b+c = (b+c)(a+b+c)^2 \geq (b+c).4a(b+c) = 4a(b+c)^2 \geq 16abc$ (ĐPCM)

c) Đặt $a^2 - a + 3 = b^2$ ($b \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 - 4b^2 = -11$$

$$\Leftrightarrow (2a+2b-1)(2a-2b-1) = -11$$

Vì $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-1; 2a-2b-1 \in \mathbb{N} \\ 2a+2b-1 \geq 2a-2b-1 \end{cases}$ nên ta xét các TH sau:

TH1: $\begin{cases} 2a+2b-1=1 \\ 2a-2b-1=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$ (TM)

TH2: $\begin{cases} 2a+2b-1=11 \\ 2a-2b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$ (TM)

Vậy $a \in \{-2; 3\}$

Bài 4.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C, D lên AB.

Ta có tứ giác CDKH là hình chữ nhật

$$\Rightarrow HK = CD = a = 2m$$

Ta có $\triangle ADK = \triangle BCH$ (ch - gn) $\Rightarrow AK = BH$

Đặt $AK = x$ ($x > 0$) $\Rightarrow \begin{cases} AB = 2x + 2 \\ DK = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3} \end{cases}$

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+4).x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(TM) \\ x=-3(L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = 4m$$

Vậy bề ngang con kênh là 4m.

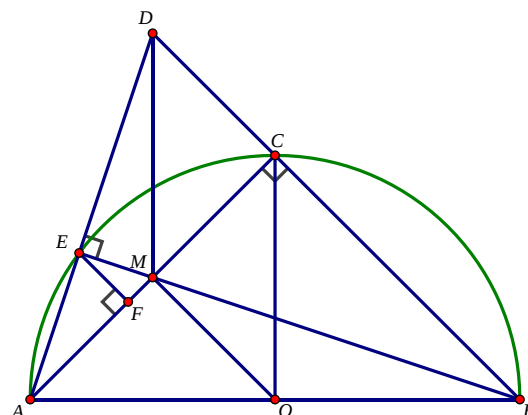
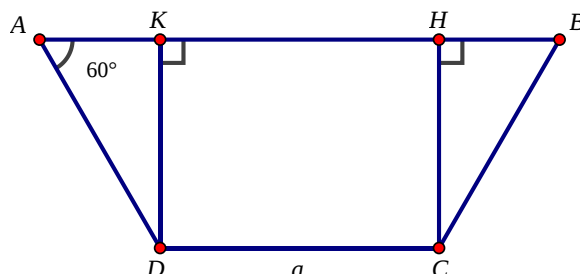
Bài 5.

a) Xét (O) có:

$$\angle AEB = \angle ACB = 90^\circ \text{ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow AC \perp BD; AD \perp BE$$

Xét $\triangle ABD$ có: AC, BE là đường cao



Mà AC, BE cắt nhau tại M

$\Rightarrow M$ là trực tâm của $\triangle ABD$

$\Rightarrow DM \perp AB$ (1)

Xét (O) có

+) C là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow OC \perp AB$ (2); $CA = CB$

+) M là trung điểm của OC $\Rightarrow OM \perp AC$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OC \parallel DM$ (3)

Ta lại có: $OM \perp AC$; $DC \perp AC \Rightarrow DC \parallel OM$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow OCDM$ là hình bình hành

b) Ta có $\triangle MFE \sim \triangle MCB (g.g) \Rightarrow \frac{MF}{EF} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$

Bài 6.

a) Vì ABCD là hình vuông $\Rightarrow CBD = 45^\circ$

$\Rightarrow HBM = HAM = 45^\circ$

$\Rightarrow ABMH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AMH = ABH = 45^\circ$

b) CMTT: $ANK = ADB = 45^\circ$

$\Rightarrow HNO = OMK = 45^\circ$

Mà $HON = KOM$

$\Rightarrow \triangle ONH \sim \triangle OMK (g.g)$

$\Rightarrow OH \cdot OM = OK \cdot ON$

c) Ta có $HAM + HMA = 90^\circ \Rightarrow AHM = 90^\circ \Rightarrow HM \perp AN$

CMTT: $NK \perp AM$

Mà HM cắt NK tại O $\Rightarrow O$ là trực tâm của $\triangle AMN \Rightarrow AM \perp MN$ tại I.

Ta có tứ giác MNHK nội tiếp $\Rightarrow ANI = AKH$

Lại có tứ giác ADNK nội tiếp $\Rightarrow AKH = AND \Rightarrow ANI = AND$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle AIN (ch - gn) \Rightarrow \begin{cases} AI = AD = 1 \\ NI = DN = y \end{cases}$$

CMTT: $BM = IM = x$

Ta có: $S_{AMN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN = \frac{1}{2} (x + y)$

Mặt khác:

$$MN^2 = MC^2 + NC^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2 \geq \frac{(2 - x - y)^2}{2}$$

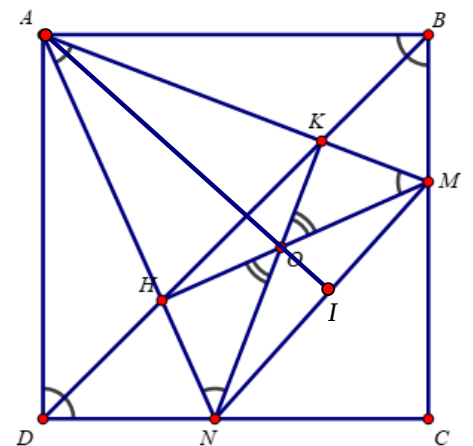
$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 \geq 4 - 4(x + y) + (x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 4(x + y) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2)^2 \geq 8$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{2} - 2$$

$$\Rightarrow S_{AMN} \geq \sqrt{2} - 1$$



Dấu “=” xảy ra khi $x = y$