

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT, NĂM 2024-2025 TỈNH BÌNH THUẬN

MÔN: TOÁN (chuyên Tin)

NỘI DUNG ĐỀ

Bài 1. (2,0 điểm) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số)

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho hai biểu thức $P = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + 2$ và $Q = 3 - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ($x \geq 1$).

Với những giá trị nào của x thì $P \leq Q$?

b) Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$.

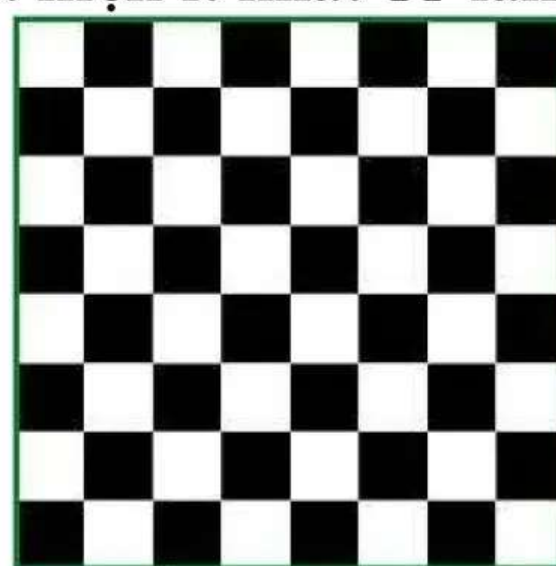
Bài 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt đường tròn (O) tại A và D . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD , N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

a) Chứng minh $ANM = ACD$.

b) Chứng minh $2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E . Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO .

Bài 5. (1,0 điểm) Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.



ĐÁP ÁN

1. (2,0 điểm) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số)

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Lời giải.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - mx - 4 = 0$ (1). Do $a.c = -4 < 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m , do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

*Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = -4$.

$$* M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} = \frac{2m + 7}{m^2 + 8} \rightarrow M - 1 = \frac{-m^2 + 2m - 1}{m^2 + 8} = -\frac{(m-1)^2}{m^2 + 8} \leq 0, \forall m$$

Suy ra $M \leq 1, \forall m$, do đó giá trị lớn nhất của M bằng 1 khi $m = 1$.

Nhận xét: Ta có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của M như sau:

$$M + \frac{1}{8} = \frac{m^2 + 16m + 64}{8(m^2 + 8)} = \frac{(m+8)^2}{8(m^2 + 8)} \geq 0, \forall m \rightarrow M \geq -\frac{1}{8}, \forall m, \text{ do đó giá trị nhỏ nhất của } M \text{ bằng } -\frac{1}{8}$$

khi $m = -8$.

2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

*Điều kiện: $x^2 + x \geq 0$, với điều kiện đó, phương trình viết lại $3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$

*Đặt $t = \sqrt{x^2 + x}$, với $t \geq 0$, phương trình trở thành: $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} (l)$.

* Với $t = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+(-1-x)^2+4x+4(-1-x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; -2), (-2; 1)$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2+4(x+y)-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$. Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$, vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; -2)$ và $(-2; 1)$.

3. (2,0 điểm)

a) Cho hai biểu thức $P = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + 2$ và $Q = 3 - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ($x \geq 1$).

Với những giá trị nào của x thì $P \leq Q$?

b) Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$.

Lời giải

a) Cho hai biểu thức $P = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + 2$ và $Q = 3 - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ($x \geq 1$).

Với những giá trị nào của x thì $P \leq Q$?

*Với $x \geq 1$ ta có

$$P - Q = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - 1 = \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} - 1 = |2-\sqrt{x-1}| + |\sqrt{x-1}-1| - 1$$

$$\text{*Ta có } \begin{cases} |2-\sqrt{x-1}| \geq 2-\sqrt{x-1} \\ |\sqrt{x-1}-1| \geq \sqrt{x-1}-1 \end{cases} \text{ (do } |A| \geq A, \forall A \text{)}. \text{ Dấu đẳng thức xảy khi } \begin{cases} 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$$

$\rightarrow P - Q \geq 0 \Leftrightarrow P \geq Q, \forall x \geq 1$, do đó $\forall x \geq 1$ thì $P \leq Q$ chỉ xảy ra khi $P = Q \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$.

b) Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$.

* Với $x \geq y > 0$ thì $x^2 \leq A = x^2 + y + 1 \leq x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, do đó tồn tại x, y để $A = x^2 + y + 1$ là số chính phương.

* Với $y > x > 0 \Rightarrow y^2 < B = y^2 + x + 4 < y^2 + y + 4 < y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$

$$\Rightarrow y^2 < B < (y+2)^2 \quad B = (y+1)^2 \xrightarrow{B=y^2+x+4} (y+1)^2 = y^2 + x + 4 \rightarrow x = 2y - 3, \text{ thay vào}$$

$$A = x^2 + y + 1 = (2y-3)^2 + y + 1 = 4y^2 - 11y + 10$$

Vì A là số chính phương nên $A = k^2$ ($k \geq 0$) $\Leftrightarrow k^2 = 4y^2 - 11y + 10$

$$\Rightarrow 4y^2 - 11y + 10 - k^2 = 0 (*) \quad \text{*Phương trình (*) ẩn } y \text{ có } \Delta = 16k^2 - 39$$

Đề A là số chính phương thì Δ là số chính phương, suy ra $\Delta = a^2, (a \geq 0) \Leftrightarrow 16k^2 - 39 = a^2$

$\rightarrow (4k - a)(4k + a) = 39 = 1.39 = 3.13$. Do $\begin{cases} 4k + a \geq 0 \\ 4k + a \geq 4k - a \end{cases}$ nên ta có

$$(4k - a)(4k + a) = 39 \Rightarrow \begin{cases} 4k - a = 1 \\ 4k + a = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 19 \\ k = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4k - a = 3 \\ 4k + a = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ k = 2 \end{cases}$$

*Với $k = 5 \rightarrow y = -1 < 0$ (loại)

Với $k = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 1$

Vậy chỉ có một cặp số $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.

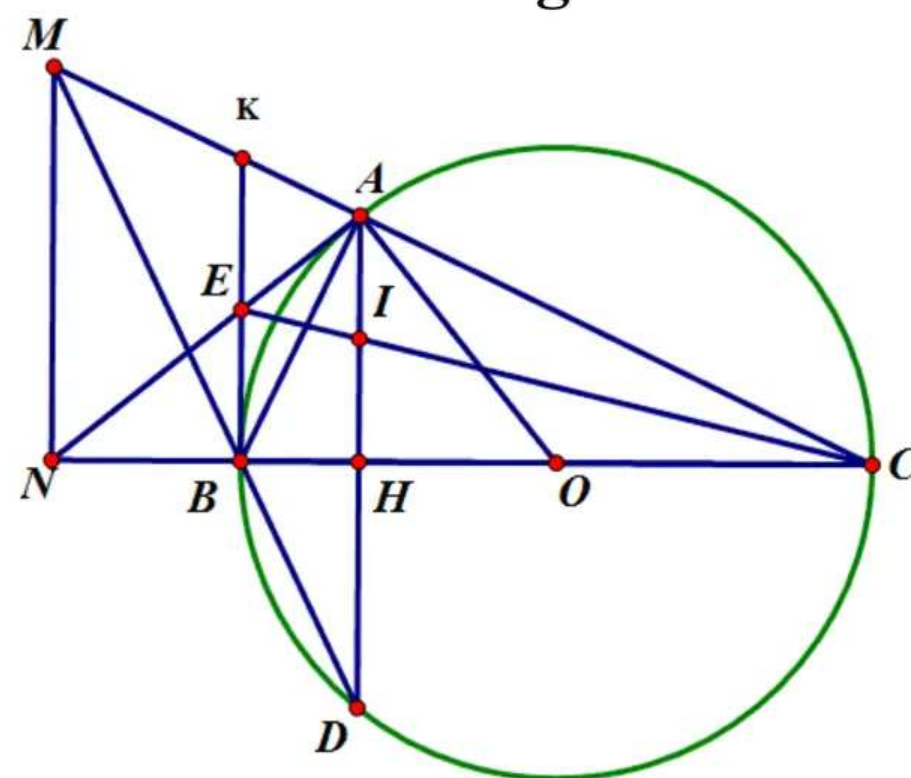
Bài 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt đường tròn (O) tại A và D . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD , N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

a) Chứng minh $ANM = ACD$.

b) Chứng minh $2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E . Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO .

Lời giải



a) Chứng minh $ANM = ACD$.

*Ta có $BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BAM = 90^\circ$, mặt khác $MNB = 90^\circ$ nên tứ giác $MNBA$ nội tiếp, suy ra $ANM = ABM = ACD$ (đpcm)

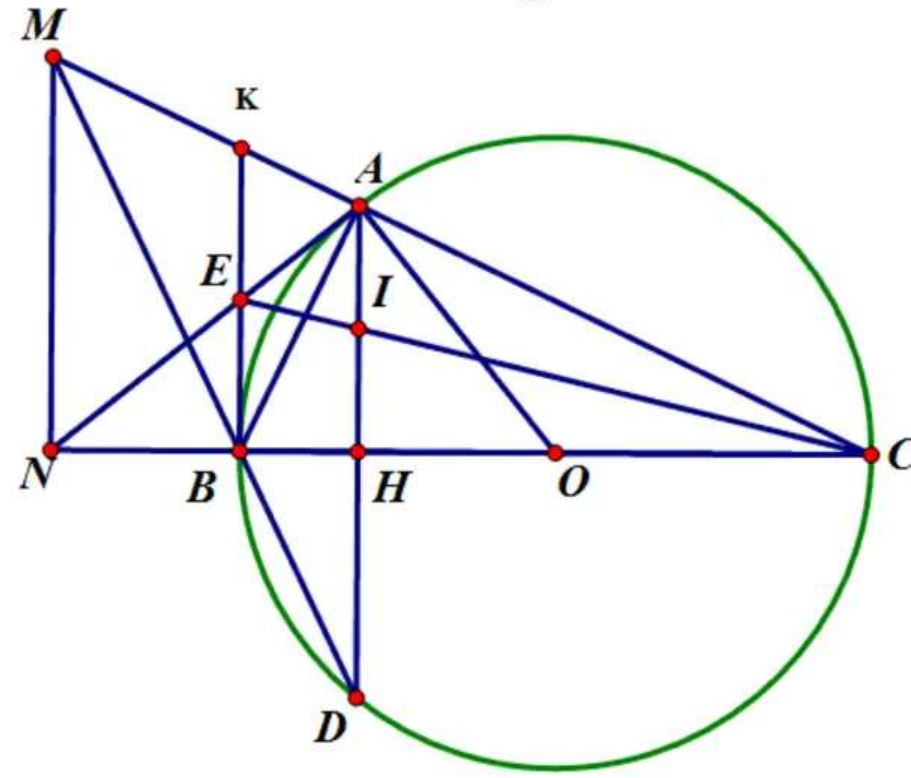
b) Chứng minh $2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$.

* Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A, nên: $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{2BO}$.

* Mà $OH = BO - BH = BO - \frac{AB^2}{2BO} = \frac{2BO^2 - AB^2}{2BO} \rightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{2BO^2 - AB^2}{AB^2} = 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - 1$

$$\text{Suy ra } 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1 \text{ (đpcm)}$$

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E . Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO .



* $MBN = DBC$ (đối đỉnh), mà $DBC = DAC$ (tứ giác $DBAC$ nội tiếp)

suy ra $MBN = DAC \Rightarrow NMB = BCA$ (1)

* Do tứ giác $MNBA$ nội tiếp nên ta có $NMB = NAB$ (2)

Tam giác OAC cân tại $O \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{OAC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $NAB = OAC \Rightarrow OAC + BAO = NAB + BAO \Leftrightarrow BAC = NAO$, mà

$BAC = 90^\circ \rightarrow NAO = 90^\circ$. Vậy NA là tiếp tuyến của (O) .

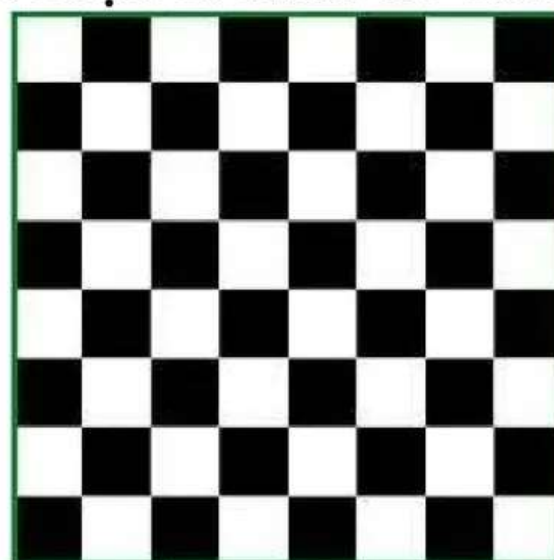
* Ta có $EA = EB$ (tính chất tiếp tuyến) và $EAB = EBA$.

Trong tam giác vuông ABK , ta có $EAB = EBA \Rightarrow BKA = EAK$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)
nên $\triangle KAE$ cân tại $E \Rightarrow AE = KE \Rightarrow EB = KE$

*Mặt khác $AI \parallel KE \rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AI}{KE}$; $HI \parallel EB \rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{HI}{BE}$, suy ra $\frac{AI}{KE} = \frac{HI}{BE}$.

Mà $KE = BE$ nên suy ra $AI = HI$, do đó I là trung điểm đoạn thẳng AH .

Bài 5. (1,0 điểm) Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.



Lời giải

* Bàn cờ vua có kích thước 8×8 :

*Xét hình vuông kích thước 2×2 (gồm bốn hình vuông nhỏ kích thước 1×1), trong hình vuông này, mỗi hình vuông 1×1 luôn có chung cạnh hoặc chung đỉnh với ba hình vuông còn lại, nên trong 4 số nguyên dương được viết trong bốn hình vuông nhỏ này chỉ có nhiều nhất

một số chẵn (vì nếu có 2 số chẵn sẽ mâu thuẫn với giả thiết nguyên tố cùng nhau) và cũng có nhiều nhất một số chia hết cho 3. Do đó trong bốn hình vuông 1×1 này chắc chắn có ít nhất hai số lẻ không chia hết cho 3,

* Bàn cờ vua có kích thước 8×8 có $64 : 4 = 16$ hình vuông 2×2 không giao nhau, nên có ít nhất $2 \times 16 = 32$ số lẻ không chia hết cho 3.

* Trong 9 số nguyên dương nhỏ hơn 10 chỉ có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong ba số 1, 5, 7 xuất hiện ít nhất $\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil + 1 = 11$ lần.

-----HẾT-----