

Câu 10. Biết $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 3\sqrt{4x-3y} = 13 \\ 7\sqrt{x+y} - 4\sqrt{4x-3y} = 2 \end{cases}$$
.

Giá trị của $x_0 + 3y_0$ là:

- A. 6 B. 10 C. 1 D. 3

Câu 11. Cho biểu thức $f(x) = (x^3 + 12x - 6)^{2022}$. Biết $a = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$, giá trị của $f(a)$ là một số tự nhiên có chữ số tận cùng là:

- A. 4 B. 6 C. 0 D. 1

Câu 12. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của

$$F = [(9 - m)x - y - m]^2 + (mx - 2y + 3)^2$$
 đạt giá trị lớn nhất.

- A. 2 B. 6 C. 1 D. 0

Câu 13. Khi hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = 2m^2 - 2m - 2 \\ 2x + y = 5m \end{cases}$$
 (m là tham số) có nghiệm duy nhất là $(x_0; y_0)$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_0 + y_0^2$ là:

- A. 3 B. -6 C. -3 D. -9

Câu 14. Cho đường thẳng $(d): y = 2x - m$ và Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt:

- A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \leq 1$ D. $m < 1$

Câu 15. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính số đo $\widehat{BIC}$

- A. $\widehat{BIC} = 135^\circ$ B. $\widehat{BIC} = 90^\circ$ C. $\widehat{BIC} = 120^\circ$ D. $\widehat{BIC} = 110^\circ$

Câu 16. Cho tam giác ABC nhọn, có BK (K thuộc AC) và CE (E thuộc AB) là các đường cao. Đường tròn đường kính AB cắt đoạn CE tại P , đường tròn đường kính AC cắt đoạn BK tại Q . Biết $\widehat{PAQ} = 60^\circ$ và $AP = 5\text{cm}$. Tính độ dài đoạn PQ .

- A. $PQ = 7,5\text{cm}$ B. $PQ = 2,5\text{cm}$ C. $PQ = 5\text{cm}$ D. $PQ = 10\text{cm}$

Câu 17. Nghiệm x của phương trình
$$\frac{x}{1} + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+2022} = \frac{8088}{2023}$$
 là:

- A. $x = \frac{1}{4}$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = \frac{1}{2}$

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 7$. Biết độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B, C của tam giác ABC bằng nhau. Tính chu vi của tam giác ABC .

- A. $14 + 7\sqrt{2}$ B. $21 + 7\sqrt{2}$ C. 21 D. $14 + \sqrt{2}$

Câu 19. Số nghiệm của phương trình $(x^2 - 8x + 7)(|x - 2| - 5) = 0$ là:

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 20. Gọi A, B là các số thực sao cho
$$\frac{2x}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$
, với mọi $x \neq 1$ và $x \neq 3$.

Giá trị của $A + 2B$ bằng:

- A. -3 B. 3 C. 5 D. 1

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. 1) Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{x + \sqrt{x} - 2}{x + 3\sqrt{x} + 2} - \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right)$$
 với $x > 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $4P + 3\sqrt{x} = \frac{19}{3}$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-3)[x^2 + 2(m+1)x - m^2] = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 91$

Lời giải. 1a) Ta có $P = \left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \right]$

$$= \left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-1}{(4\sqrt{x})^2} \cdot \frac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1-x}{4\sqrt{x}}$$

b) Ta có $4P + 3\sqrt{x} = \frac{19}{3} \Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} = \frac{19}{3} \Leftrightarrow 6x - 19\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow (6\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{36}; x = 9$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Phương trình luôn có nghiệm $x_3 = 3$. Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2 + 2(m+1)x - m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Tức là $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 3^2 + 6(m+1) - m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+1)^2 + m^2 > 0 \\ m^2 - 6m - 15 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 3 \pm 2\sqrt{6} \quad (*)$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m - 2 \\ x_1 x_2 = -m^2 \end{cases}$. Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 91 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 82$

$\Rightarrow 4(m+1)^2 + 2m^2 - 82 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m - 39 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{3}; m = 3$ (TMĐK (*))

Vậy $m \in \left\{-\frac{13}{3}; 3\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2. a) Giải phương trình $(2x^2 - 21x + 55)(\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}) = 5(x-5)$

b) Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ là một số nguyên.

Chứng minh rằng $x^4 y^{12} - 1$ chia hết cho $y+1$

Lời giải. a) ĐKXĐ: $x \geq \frac{8}{3}$. Phương trình tương đương

$(x-5)[(2x-11)(\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}) - 5] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (2x-11)(\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}) = 5 \end{cases}$

Xét $(2x-11)(\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}) = 5 \Leftrightarrow (2x-11)(2x-9) = 5(\sqrt{3x-8} + \sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 40x + 99 = 5\sqrt{3x-8} + 5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 96 = 5\sqrt{3x-8} - (3x-4) + 5\sqrt{x+1} - (x+7)$

$\Leftrightarrow 4(x-3)(x-8) = \frac{-9(x-8)(x-3)}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{-(x-8)(x-3)}{5\sqrt{x+1} + (x+7)}$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-8) \left(4 + \frac{9}{5\sqrt{3x-8} + 3x-4} + \frac{1}{5\sqrt{x+1} + x+7} \right) = 0$

$$\text{Do } x \geq \frac{8}{3} \Rightarrow 4 + \frac{9}{5\sqrt{3x-8}+3x-4} + \frac{1}{5\sqrt{x+1}+x+7} > 0 \text{ nên } (x-3)(x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=8 \end{cases}$$

Đối chiếu ĐKXD ta có tập nghiệm của phương trình $S = \{3; 5; 8\}$

b) Đặt $\frac{x^4-1}{y+1} = \frac{a}{b}; \frac{y^4-1}{x+1} = \frac{c}{d}$ với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*$ và $(a;b)=1; (c;d)=1$

Ta có $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = k \Rightarrow ad+bc = kbd$ và $k \in \mathbb{Z}$

Suy $\begin{cases} ad+bc \vdots b \\ ad+bc \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad \vdots b \\ bc \vdots d \end{cases}$. Vì $(a;b)=1; (c;d)=1$ nên $\begin{cases} d \vdots b \\ b \vdots d \end{cases} \Rightarrow b=d$

Mặt khác $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x^4-1}{y+1} \cdot \frac{y^4-1}{x+1} = (x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1) = m \in \mathbb{Z}$ (vì $x, y \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow ac = mbd \Rightarrow ac \vdots d \Rightarrow a \vdots d \Rightarrow a \vdots b$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow (x^4-1) \vdots (y+1)$

Ta có $x^4 y^{12} - 1 = x^4 y^{12} - x^4 + x^4 - 1 = x^4 (y^{12} - 1) + x^4 - 1$

Vì $y^{12} - 1 = (y^2 - 1)M \vdots (y+1)$ và $(x^4 - 1) \vdots (y+1)$ suy ra $x^4 y^{12} - 1$ chia hết cho $y+1$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$) có đường cao AH (H thuộc BC). Đường tròn tâm A, bán kính AH cắt đường thẳng AH tại điểm thứ hai là E (E khác H) và cắt đoạn AB tại D. Qua điểm B kẻ tiếp tuyến với đường tròn (A) tại F (F khác H), tiếp tuyến này cắt tia CA tại G. Trên cung nhỏ DH của đường tròn (A) lấy điểm M (M khác H, D), tiếp tuyến với đường tròn (A) tại M cắt đường thẳng BC, BG lần lượt tại P và Q. Tia BM cắt đường tròn (A) tại N (N khác M).

a) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng AB. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, M, N cùng thuộc một đường tròn và tia IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$

b) Gọi K, L lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng EM, EN. Chứng minh rằng đường thẳng HL song song với đường thẳng EK và $GQ \cdot CP = GF \cdot BC$

Lời giải. a) Áp dụng hệ thức lượng trong

tam giác vuông AHB có $BI \cdot BA = BH^2$

Áp dụng phương tích đường tròn ta có

$$BM \cdot BN = BH^2 \Rightarrow BI \cdot BA = BM \cdot BN$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{BN} = \frac{BM}{BA}. \text{ Xét } \triangle BIM \text{ và } \triangle BNA \text{ có}$$

$$\widehat{ABN} \text{ chung và } \frac{BI}{BN} = \frac{BM}{BA} \text{ nên } \triangle BIM \sim \triangle BNA$$

$$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BNA} \text{ mà } \widehat{BIM} + \widehat{AIM} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BNA} + \widehat{AIM} = 180^\circ \text{ suy ra tứ giác AIMN nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AMN} \text{ mà } \triangle AMN \text{ cân tại A nên}$$

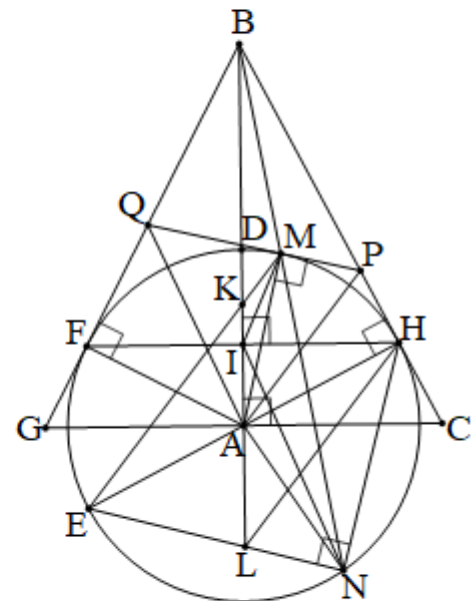
$$\widehat{AMN} = \widehat{BNA} = \widehat{BIM} \Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{BIM}$$

$$\Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{HIN} \text{ (vì IH} \perp \text{AB), do đó}$$

IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$

b) Ta có $\widehat{HIL} + \widehat{HNL} = 180^\circ$ nên tứ giác HILN nội tiếp

$$\text{Suy ra } \widehat{HLN} = \widehat{HIN} = \widehat{HIM} = \frac{1}{2} \widehat{MIN} = \frac{1}{2} \widehat{MAN} = \widehat{MEN} \text{ hay } \widehat{HLN} = \widehat{MEN} \text{ suy ra HL} \parallel \text{EK}$$



Ta có BA là phân giác, là đường cao của $\triangle BGC$ nên $\triangle BGC$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{G}$ (1).

$$\text{Mặt khác } \widehat{PAQ} = \widehat{MAP} + \widehat{MAQ} = \frac{1}{2}(\widehat{MAH} + \widehat{MAF}) = \frac{1}{2}\widehat{HAF} = \widehat{HAB} = \widehat{C}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{CPA} = 180^\circ - (\widehat{C} + \widehat{CAP}) = 180^\circ - (\widehat{PAQ} + \widehat{CAP}) = \widehat{GAQ} \text{ hay } \widehat{CPA} = \widehat{GAQ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \triangle CPA \sim \triangle GAQ \text{ (g - g) } \Rightarrow \frac{CP}{GA} = \frac{CA}{GQ} \Rightarrow GQ \cdot CP = GA \cdot CA = GA^2$$

Áp dụng hệ thức lượng ta có $GF \cdot BG = GA^2 \Rightarrow GF \cdot BC = GA^2$. Suy ra $GQ \cdot CP = GF \cdot BC$

Câu 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right)$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $ab + bc + ca \leq 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$

$$\text{Áp dụng BĐT Bunia ta có } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{2} \sqrt{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+b} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \right) \Leftrightarrow \sqrt{a+b} - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} \geq \sqrt{\frac{ab}{a+b}}$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{b+c} - \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} \geq \sqrt{\frac{bc}{b+c}}; \sqrt{c+a} - \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \geq \sqrt{\frac{ca}{c+a}}$$

$$\text{Do đó } P \geq \sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a}}. \text{ Áp dụng BĐT Cauchy - Schwarz ta có}$$

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}} \geq \frac{9}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}}. \text{ Lại áp dụng BĐT Bunhia}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \leq \sqrt{6 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \leq \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow P \geq \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Vậy GTNN của P bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Đạt được khi $a = b = c = 1$.