

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1, n = 1, 2, \dots$

a) Với $a = 2$, tìm $\lim u_n$.

b) Với $a \in (-1; 3)$ chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_n \in (-1; 0), \forall n \geq k$.

Bài 2 (5,0 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. (*)$$

Chứng minh rằng f hoặc là hàm hằng hoặc là toàn ánh.

Bài 3 (5,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn đó (T là tiếp điểm). Kẻ đường kính TA của (O) . MA cắt (O) tại điểm thứ hai là B . Lấy C thuộc (O) (C, B nằm khác phía đối với AT). Gọi D là điểm đối xứng với T qua C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác $BT D$ cắt BC và MT lần lượt tại H ($H \neq B$) và K ($K \neq T$).

a) Chứng minh rằng $\frac{BT}{BD} = \frac{HD}{HT}$.

b) Gọi N là giao điểm của BC và DM . Chứng minh rằng các điểm B, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4 (5,0 điểm). Một bác nông dân đi vào rừng nhặt được 223 hạt dẻ. Bác ấy muốn chia số hạt dẻ nhặt được cho 5 con sóc sao cho con nào cũng nhận được ít nhất một hạt.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia để có một con sóc nhận được số hạt dẻ nhiều hơn tổng số hạt dẻ của 4 con còn lại?

b) Biết rằng tất cả các con sóc đều nhận được số hạt dẻ là số lẻ không chia hết cho 3, chứng minh rằng có thể chọn ra hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là một lập phương đúng.

----- **Hết** -----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: