

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC 2023 – 2024

.....
ĐỀ CHÍNH THỨC

.....
Đề thi môn TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 07/06/2023

Câu 1 (3 điểm):

a) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$.

b) Giải phương trình: $x^2 - x + 6 = 2\sqrt{x^3 + 8}$

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 2x^2 - xy - y + 2x = 0 \\ \sqrt{x^2 - y - 1} + x + y = 1 \end{cases}$$

Câu 2 (1,5 điểm):

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^3 + x^2y - 2xy + 2x - 2y^2 + 2y + 1 = 0$$

b) Cho 31 điểm bất kì nằm bên trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 12. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 nằm bên trong hình vuông ABCD và không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho.

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\frac{b-4c}{a} \geq \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm âm

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{(1+8a^3)(1+8b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+8b^3)(1+8c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+8c^3)(1+8a^3)}}$$

Câu 4 (2,5 điểm): Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác A và cắt BC tại G. Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N.

a) Chứng minh tam giác OMN cân

b) Gọi I là trung điểm của DE, OA cắt BC tại K. Chứng minh: $IE^2 = IA \cdot IG$

c) Tia BE cắt AC ở H. Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG.

Câu 5 (1,0 điểm): Cho đường tròn (O) bán kính 1. Ba điểm phân biệt A, B, C thay đổi nằm trên đường tròn (O) sao cho điểm O nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB tại M, N, P khác O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = OM^2 + ON^2 + OP^2$

.....HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI:**Câu 1 (3 điểm):**

a) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$.

b) Giải phương trình: $x^2 - x + 6 = 2\sqrt{x^3 + 8}$

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 2x^2 - xy - y + 2x = 0 \\ \sqrt{x^2 - y - 1} + x + y = 1 \end{cases}$$

Giải :

a) $P = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-2x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\Rightarrow P = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot (-(\sqrt{x}-1)) = \sqrt{x}$$

b) Điều kiện: $x \geq -2$. Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 4) + (x + 2) - 2\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x+2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn ĐK})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \{1; 2\}$

c) Điều kiện: $x^2 - y - 1 \geq 0$. Xét hệ pt:
$$\begin{cases} y^2 - 2x^2 - xy - y + 2x = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - y - 1} + x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

ta có: $(1) \Leftrightarrow (y-2x)(y+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ y=1-x \end{cases}$

* Trường hợp 1: với $y = 2x$ thay vào (2), thu được:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = 1 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x^2 - 2x - 1 = 1 - 6x + 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 8x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

* Trường hợp 2: với $y = 1 - x$ thay vào (2), thu được: $\sqrt{x^2 + x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ pt đã cho là: $S = \{(1; 0); (-2; 3)\}$

Câu 2 (1,5 điểm):

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^3 + x^2y - 2xy + 2x - 2y^2 + 2y + 1 = 0$$

b) Cho 31 điểm bất kì nằm bên trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 12. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 nằm bên trong hình vuông ABCD và không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho.

Giải :

a) Ta có: $(x + y)(x^2 - 2y + 2) = -1$. Do đó có hai khả năng xảy ra:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - 2y + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 - 2y + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy có duy nhất cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu là: $(-1; 2)$.

b) Ta chia hình vuông ABCD thành 36 hình vuông có độ dài cạnh bằng 2. Khi đó có ít nhất một hình vuông không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho. Hình tròn nội tiếp hình vuông đã cho là hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\frac{b-4c}{a} \geq \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm âm}$$

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{(1+8a^3)(1+8b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+8b^3)(1+8c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+8c^3)(1+8a^3)}}$$

Giải :

a) Từ giả thiết ta có: $a \neq 0$ và $\frac{a-4b+16c}{a} \leq 0 \Rightarrow a(a-4b+16c) \leq 0 \Rightarrow (a-2b)^2 \leq 4(b^2-4ac) \Rightarrow \Delta \geq 0$

do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Đến đây thay vào giả thiết

ta thu được: $-(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow (4x_1 + 1)(4x_2 + 1) \leq 0$. Nếu x_1, x_2 đều không âm thì dẫn đến điều vô lý. Do vậy phương trình phải có ít nhất một nghiệm âm.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta được:

$$\sqrt{1+8a^3} = \sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)} \leq \frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2} = 2a^2 + 1.$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{1+8b^3} \leq 2b^2 + 1; \sqrt{1+8c^3} \leq 2c^2 + 1$.

$$\text{Do đó: } P \geq \frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)} + \frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)} + \frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}$$

$$\text{Tiếp theo ta chứng minh: } \frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)} + \frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)} + \frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)} \geq \frac{1}{3} (*)$$

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow 3(2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2 + b^2 + c^2) \geq (2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2) \geq 9.$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\sqrt[4]{a^4b^4c^4} = 3$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$.

Vậy GTNN của $P = \frac{1}{3}$ đạt tại $a = b = c = 1$

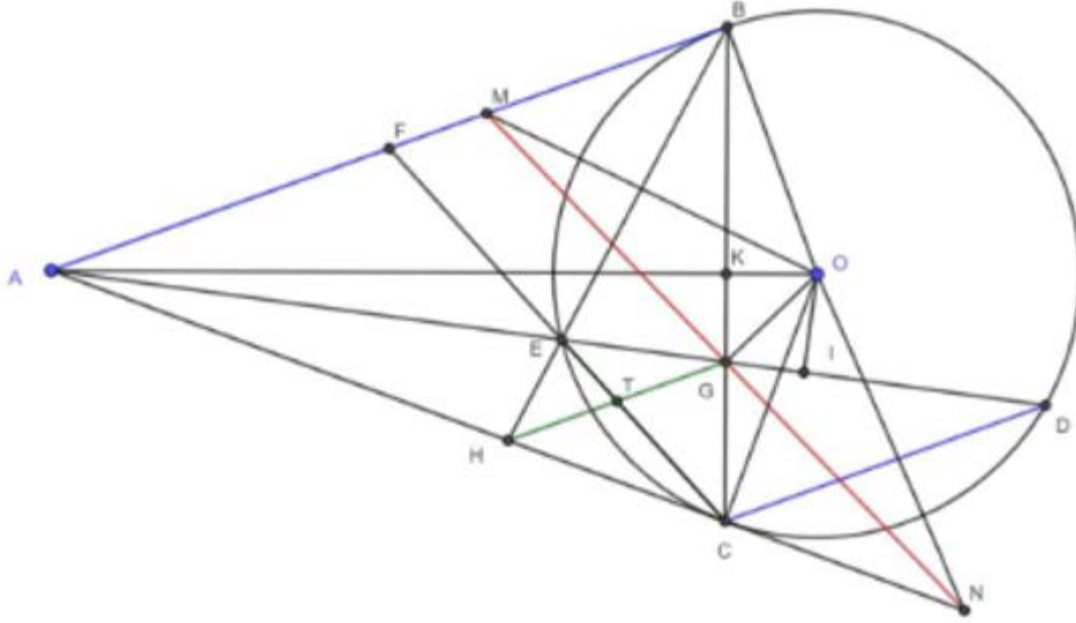
Câu 4 (2,5 điểm): Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác A và cắt BC tại G. Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N.

a) Chứng minh tam giác OMN cân

b) Gọi I là trung điểm của DE, OA cắt BC tại K. Chứng minh: $IE^2 = IA \cdot IG$

c) Tia BE cắt AC ở H. Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG.

Giải :



a) Tứ giác OGMB nội tiếp đường tròn đường kính MO $\Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{OBG}$.

Tứ giác OGCN nội tiếp đường tròn đường kính NO $\Rightarrow \widehat{ONG} = \widehat{OCG}$

Tuy nhiên tam giác OBC cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{ONG} \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O.

b) ta có: $\angle AKG = \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKG, \triangle AIO$ đồng dạng $\Rightarrow AG \cdot AI = AK \cdot AO$.

Mặt khác, dễ thấy: $AK \cdot AO = AB^2$ và $AB^2 = AE \cdot AD \Rightarrow AG \cdot AI = AE \cdot AD$

Khi đó: $AG \cdot AI = (AI - IE)(AI + IE) = AI^2 - IE^2 \Rightarrow IE^2 = AI^2 - AG \cdot AI = IG \cdot IA$

c) Gọi T là giao điểm của HG và CE. Ta có: $\widehat{BED} = \widehat{BCD} = \widehat{CBA} = \widehat{ACB} \Rightarrow HEGC$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HGC} = \widehat{HEC} = \widehat{CDB} = \widehat{CBA}$. Đến đây ta chứng minh hai đường thẳng HG, AB song song với nhau.

Kéo dài CE cắt AB tại F.

Dễ thấy: $\angle FAE = \angle EDC = \angle ECA \Rightarrow \triangle FAE, \triangle FCA$ đồng dạng $\Rightarrow FA^2 = FE \cdot FC$, mà

$FB^2 = FE \cdot FC \Rightarrow F$ là trung điểm của AB. Đến đây sử dụng định lý Ta-lét, thì:

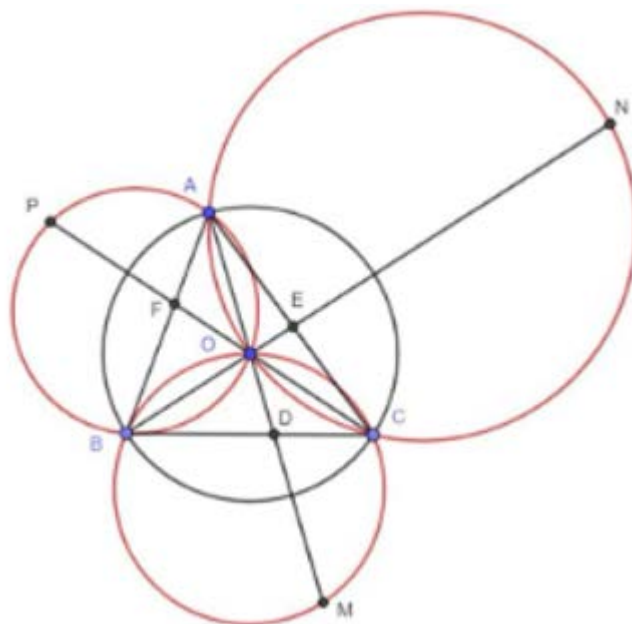
$$\frac{TG}{FB} = \frac{CT}{CF} = \frac{TH}{FA} \Rightarrow TG = TH \text{ hay T là trung điểm của GH.}$$

Câu 5 (1,0 điểm): Cho đường tròn (O) bán kính 1. Ba điểm phân biệt A, B, C thay đổi nằm trên đường tròn (O) sao cho điểm O nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt cắt đường tròn

ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB tại M, N, P khác O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = OM^2 + ON^2 + OP^2$$

Giải :



Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của OA, OB, OC với các đường thẳng BC, CA, AB

Để thấy hai tam giác OCD, OMC đồng dạng $\Rightarrow OD.OM = OC^2 = 1 \Rightarrow OM = \frac{1}{OD}$

Tương tự: $ON = \frac{1}{OE}; OP = \frac{1}{OF}$

Đặt: $x = S_{OBC}; y = S_{OCA}; z = S_{OAB} \Rightarrow \frac{1}{OD} = \frac{OA}{OD} = \frac{y+z}{x}$

Tương tự: $\frac{1}{OE} = \frac{x+z}{y}; \frac{1}{OF} = \frac{y+z}{x}$

Khi đó: $\frac{1}{OD} + \frac{1}{OE} + \frac{1}{OF} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6.$

Do đó: $S = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OF^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{OD} + \frac{1}{OE} + \frac{1}{OF} \right)^2 \geq 12.$

Vậy GTNN của biểu thức S là 12 đạt được khi tam giác ABC đều.